

Investigation of the Extension Possibilities of the Martingale Quantum State Estimation Method for Two-Level Quantum Systems

Abstract of the master's thesis in mathematics

Krisztián Balázs

Two-level quantum systems (or quantum bits) are the simplest nontrivial quantum systems. Since in quantum computation and quantum information theory they serve as the basic units of information, their efficient measurement and estimation, which means the 'reading of the stored information', is an essential and important problem. The measurement of quantum bits is far not as easy as in case of classical bits, because on one hand, a single measurement of a quantum system can extract only a 'portion' of the state, and on the other hand, only one single measurement may affect the state drastically in an irreversible way.

For this reason many approaches have been proposed for estimating the states of quantum systems, especially two-level quantum systems. Recently a Martingale based state estimation method has been developed, which has shown very promising properties from the point of view of estimation efficiency. However, the drawback of this technique is that it is capable of estimating only one single dimension of the state of a two-level quantum system. In order to estimate multiple dimensions of the state, the estimation process has to be repeated for each dimension separately.

The aim of my master's thesis work was to generalize the Martingale method by making it capable of estimating multiple dimensions of the state of a given two-level quantum system simultaneously, in the case when the state alters during the estimation process only due to interacting with the measurement system, i.e. to extend the Martingale technique to multiple dimensions, when there is no local time evolution in the measured system. The extension had to deal with at least two-dimensions, but the ultimate goal was to estimate the whole state of the given two-level quantum system simultaneously.

The extension of the Martingale method to multiple dimensions requires the solutions of equations derived from the dynamics of coupled quantum systems. In other words, mathematical expressions having nonlinear, trigonometric terms have to be appropriately parameterized.

Due to this complicated nature of the task that my master's thesis aimed to solve, in the first part of my work symbolic and numerical software computations were applied on a personal computer. For this purpose, as the first step, a simulation environment was established in Matlab. Then, using the implemented environment the proper general equations for parameterization were derived. After that, numerical algorithms were applied in order to find appropriate values for the parameters.

Since the results achieved by the symbolic and numerical computations led to the formulation of strange, previously unexpected conjectures, in the second part of my work the problem was investigated analytically and, as a result, theorems were formulated and proved determining whether the conjectures made were correct or not.

Martingál alapú kvantum állapotbecslési módszer kiterjesztési lehetőségeinek vizsgálata kétszintű kvantumrendszerek esetén

Matematikus M.Sc. diplomamunka kivonata

Balázs Krisztián

A kétszintű kvantumrendszerek (vagyis a kvantumbitek) a legegyszerűbb nemtriviális kvantumrendszerek. Mivel a kvantum-számítástechnikában és a kvantum-információelméletben az információ alapegységeként szolgálnak, hatékony mérésük és becslésük, amely az „eltárolt információ kiolvasását” jelenti, egy alapvető és fontos probléma. A kvantumbitek mérése korántsem olyan egyszerű, mint a hagyományos biteké, mert egyrészt egy kvantumrendszerből egyetlen mérés révén az állapotnak csupán egy „része” nyerhető ki, másrészt pedig már egyetlen mérés is képes az állapotot drasztikusan, irreverzibilis módon megváltoztatni.

Emiatt számos megközelítést javasoltak kvantumrendszerek, főként kétszintű kvantumrendszerek állapotának becslésére. Nemrégiben egy Martingál alapú állapotbecslési módszer került kifejlesztésre, amely a becslési hatékonyság szempontjából nagyon ígéretes tulajdonságokat mutatott. Azonban a technika hátránya, hogy egy kétszintű kvantumrendszer állapotának csupán egy dimenzió menti becslésére képes. Annak érdekében, hogy az állapotnak több dimenziója becsülhetővé váljon, a becslési folyamatot minden dimenzió mentén külön-külön szükséges megismételni.

Diplomamunkám célja a Martingál módszer általánosítása volt oly módon, hogy képessé váljon egy adott kétszintű kvantumrendszer állapota több dimenziójának egyidejű becslésére abban az esetben, amikor az állapot a becslési folyamat alatt kizárólag a mérőrendszerrel történő kölcsönhatás miatt változik, vagyis a feladatom az volt, hogy kiterjesszem a Martingál technikát több dimenzióra, amikor nincs a mért rendszerben lokális időfejlődés. A kiterjesztésnek tudnia kell becsülnie legalább két dimenziót, de végső célként az adott kétszintű kvantumrendszer állapotának egészét egyidejűleg.

A Martingál módszer több dimenzióra történő kiterjesztéséhez összezsúrolt kvantumrendszerek dinamikájából levezethető egyenleteket szükséges megoldani. Más szavakkal, nemlineáris, trigonometrikus tagokkal rendelkező matematikai kifejezéseket szükséges megfelelő módon felparaméterezni.

A diplomamunkám által megoldandó feladatnak a komplikált természete miatt munkám első részében szimbolikus és numerikus számításokat végeztem szoftveresen személyi számítógépen. Ennek érdekében első lépésként egy szimulációs környezetet hoztam létre Matlabban. Ezután az implementált környezetet használva levezettem a megfelelő általános egyenleteket a paraméterezéshez, majd pedig numerikus algoritmusokat alkalmaztam az alkalmas paraméterértékek megtalálása érdekében.

Mivel a szimbolikus és numerikus számítások eredményei különös, előzetesen nem várt sejtések megfogalmazásához vezettek, munkám második részében a feladatot analitikusan vizsgáltam meg, amelynek eredményeképpen tételeket fogalmaztam meg és bizonyítottam be a felállított sejtések helyességének eldöntése érdekében.