

Kivonat

Szakdolgozatom témája egy kitüntetett algebrai területet dolgoz fel Dr. Nagy Attila véges félcsoporthok mátrixreprezentációjáról valamint Dr. Rónyai Lajos akadémikussal közösen írt, félcsoporthok algebraik annihilátorairól szóló publikációk nyomán. A cikkek vázát számos olyan alapfogalom alkotja, amelyet az Algebra és az Algebra 2 tárgy keretein belül oktatnak. Ezeket a bevezetésben érdemesnek tartottam röviden ismertetni és a szükséges tételeket bizonyításokkal együtt részletezni. Itt definiálni fogjuk az algebrai struktúrákat általánosan. Megismerjük a struktúrák faktORIZÁCIÓJÁVAL illetve direkt szorzataik által kapott szűkebb illetve bővebb objektumokat. Ezen kívül definíciószerűen felsorakoztatjuk mindazokat a speciális struktúrákat, amelyekre a dolgozat épít, például félcsoporthokra, csoportokra, testekre, vektorterekre és a mátrixalgebrákra. Az utóbbi megkonstruálása az előző fogalmak segítségével valósul meg.

Szakdolgozatom egyik központi kérdése, hogy miként reprezentálhatók véges, $n \in \mathbb{N}^+$ elemű félcsoporthok valamely test feletti, $n \times n$ -típusú mátrixokkal. Tehát a félcsoporth elemeihez mátrixokat szeretnénk rendelni struktúramegőrző módon a mátrixszorzásra nézve. Pontosabban, ha adott egy S véges félcsoporth és tekintjük az $M_n(\mathbb{F})$ módon jelölt $\mathbb{F}$ test feletti mátrixok algebráját, akkor azt mondjuk, hogy S reprezentálható az $M_n(\mathbb{F})$ -beli elemekkel, ha létezik S -nek az $M_n(\mathbb{F})$ multiplikatív részstruktúrájára egy γ művelettartó leképezés. A reprezentáció akkor hű, ha injektív, vagyis ha nincs két olyan félcsoporthbeli elem, amelyhez ugyanazt rendeljük. Megvizsgáljuk továbbá a reprezentálás lehetőségeit $\gamma(S)$ által generált rész(mátrix)algebra dimenziójának és a test karakterisztikájának a perspektívájából. Sőt, struktúrák direkt szorzataival vagy félhálófelbontás faktorizációjával kapott félcsoporthok γ általi képének a dimenziójára is számos információ áll rendelkezésre, ha a félcsoporth bal redukzív és jobb reguláris reprezentációt alkalmazunk.

A dolgozat másik része véges, test feletti félcsoporthok algebraik jobb oldali annihilátorait tárgyalja: melyek triviálisak (egyeleműek) és melyek nem. Itt segítségünkre szolgál az a tény, hogy véges elemszámú félcsoporth valamely test feletti félcsoporth algebrájának jobb oldali annihilátora pontosan akkor triviális, ha a félcsoporth elemeiből képzett, jobb oldali mátrixokból álló rendszere lineárisan független. Az előző fejezetekhez hasonlóan speciális struktúrák (félcsoporth, köteg, derékszögű köteg, jobb zéró félcsoporth) konstrukcióit hajtjuk végre (faktorizálunk vagy direkt szorzunk), hogy az általuk generált félcsoporthalgebra annihilátoraira vonatkozó ismereteket, tételeket kimondjuk.