Sztochasztikus differenciálegyenletek közelítő megoldása, pénzügyi alkalmazások

Alkalmazott matematikus MSc diplomamunka - kivonat

Homoki Tibor

A diplomamunka témája egy sztochasztikus differenciálegyenletek közelítő megoldását előállító módszer vizsgálata, és annak pénzügyekben való alkalmazási lehetőségei. A sztochasztikus differenciálegyenletek jelentőségére – biológiai, fizikai és egyéb területeken való megjelenésük miatt – már jóval a precíz matematikai leírásuk előtt, a 20. század elején fény derült. Elméletük az Itô által kidolgozott sztochasztikus kalkulus kialakulása óta folyamatosan fejlődik, elsősorban az őket használó modellek még pontosabb megértése érdekében. Az ilyen típusú egyenletek megoldása viszont csak ritkán írható fel egyszerű, zárt formula alakjában, ezért természetes, hogy igény van olyan közelítő megoldásokra, amik a megfelelő konvergencia mellett könnyen és gyorsan számolhatók. Ez különösen fontos például a pénzügy-matematikai alkalmazások esetén, ahol az állandóan változó tőzsdei folyamatok tanulmányozásához hatékony és helyes modellekre van szükség. Az alkalmazott matematika ezen – napjainkban talán az egyik leginkább használt – ágában Black és Scholes 1973-as cikke [1] óta az opciók és az egyéb pénzügyi származtatott termékek váltak a legdinamikusabban növekvő piacokká, amelyek változatosságuk és komplexitásuk miatt egyre bonyolultabb matematikai modellek kidolgozását igénylik.

A dolgozatban az említett két terület összekapcsolása az ázsiai opciók árazási problémájának egy megfelelő sztochasztikus differenciálegyenlet közelítő megoldására való visszavezetésével történik. Ehhez elsőként áttekintettük a sztochasztikus analízis azon alapvető fogalmait és állításait, – Itô folyamatok, Girszanov-tétel, Feynman–Kac formula – amelyek elengedhetetlenek voltak a későbbi munkához, majd a második fejezetben ismertettünk egy [2]-beli eljárást, amely egyszerű, szimmetrikus bolyongások jól definiált módosításával egy Brown-mozgást approximáló sorozatot készít el.

Ezután, a harmadik fejezetben megfogalmazzuk azt a [3]-beli módszert, amivel sztochasztikus differenciálegyenletek közelítő megoldását állíthatjuk elő. A vizsgált

$$\mathrm{d}X(t) = \mu(t, X(t))\,\mathrm{d}t + \sigma(t, X(t))\,\mathrm{d}B(t),\ \ X(0) = x_0$$

alakú egyenletek gyenge megoldását a Girszanov-tétel és egy közönséges differenciálegyenlet megoldása alapján adjuk meg, bizonyos, az együtthatófüggvényekre vonatkozó feltételek teljesülése esetén (lásd 3.1-es lemma). Ezen gyenge megoldás közelítését pedig a korábban bemutatott, Brown-mozgást approximáló folyamat segítségével végezzük el.

A negyedik fejezet – az eddigiek alkalmazásának céljával – a pénzügyi matematika egyik klasszikus problémája, az opcióárazás főbb fogalmainak tisztázásával indul. Ezt követően rátértünk vizsgálódásunk fő tárgyára, az ázsiai call opcióra, melynek árára a kifizetési függvénye tulajdonságaiból adódóan nem ismert zárt kifejezés, ezért azt közelítő eljárásokkal számolják. Néhány ezt megvalósító algoritmus elemzése után az ázsiai opció árára több, – elméletükben hasonló – módon is saját becsléseket adtunk, amelyek igazodnak a téma irodalmában fellehető eredményekhez. További kutatást, illetve a megkezdett számolások folytatását igényli annak eldöntése, hogy az opció kifizetéséből levezetett sztochasztikus differenciálegyenletre alkalmazható-e a [3]-beli módszer, és ha igen, akkor azzal milyen közelítések kaphatók az árra.

[1] F. Black and M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, 637–654, (1973), JSTOR.

[2] T. Szabados, An elementary introduction to the Wiener process and stochastic integrals. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, **31**, 249-297, (1996).

[3] J. van der Hoek and T. Szabados, An approximation of Itô diffusions based on simple random walks. *Közlésre benyújtva*, (2014).