Kivonat

A XX. században a valószínűségszámítás megerősödésének köszönhetően kifejlődött a matematika pénzügyekkel foglalkozó ága, a pénzügyi matematika. A véletlen jelenségek (főként árfolyam ingadozások) leírására kezdetleges eszköz a bolyongás és a Brown-mozgás, vagy ezek függvényeinek használata. Exponenciális, (avagy geometriai) Brown-mozgást használt közös munkájuk során Fischer Black és Myron Scholes híressé vált 1973-as cikkükben, ahol az egyik jól ismert papírnak, az európai opciónak az árát határozták meg. Néhány évvel később Robert C. Merton e modellt formálisabb matematikai alapokra helyezte az Itô-kalkulus segítségével, melyért 1997-ben Scholes-szal együtt közgazdasági Nobel-emlékdíjat kaptak.

Itô eredményeit a sztochasztikus analízis megszületésének is nevezhetjük, melynek alapjait 1944-ben publikálta. A formalizmus, szépsége ellenére, meglehetősen bonyolult matematikai eszköztárat igényel; az időparaméter folytonos. A Black–Scholes–Merton modell tehát e segítségével vizsgálható, de használható egy szemléletesebb és elemibb út is, melyet John C. Cox, Stephen A. Ross és Mark Rubinstein használtak bolyongásra alapozva. Ezt binomiális opcióárazásnak nevezzük és természetesen az európai opciótól eltérő esetek is vizsgálhatók vele. Amennyiben a diszkrét modell időlépései egyre csökkennek, úgy a binomiális modell eredményei konvergálnak a folytonos Black–Scholes–Merton modell eredményeihez. A benne szereplő bolyongás azonban csak gyengén közelíti a folytonos modell Brown-mozgását, nem pályánként. Ennél azonban elérhető erősebb konvergencia is majdnem biztos értelemben, melyben a finomítások során a pályákat adott pontokon *tükrözni* kell és az iteráció során *zsugorítani*.

Szakdolgozatom témája pedig épp az, hogy ezzel a tükrözéssel és zsugorítással előállított bolyongás segítségével mutatok be egy olyan modellt, ami az időfinomítások során erős közelítését adja a Black–Scholes modellnek; emellett a binomiális modellel való kapcsolatát is bemutatom. Ehhez először is részletesen bemutatom az előbb említett bolyongás tulajdonságait és leglényegesebb tételeit a 2. fejezetben Szabados Tamás témavezetőm egyik cikke alapján, egyéni ábrákkal kiegészítve. A 3. fejezetben a pénzügyi alapokat mutatom be és a fentebb már említett fogalmakat tisztázom az európai opcióval kapcsolatban és az ismert tételeket, eredményeket ismertetem. Ezután következik

szakdolgozatom főként önálló eredményeit bemutató része a 4. fejezetben. Itt felépítem a Black–Scholes elméletet azonos feltevések mellett egy diszkrét modellből közelítve: a Black–Scholes formula meghatározása, a Black–Scholes egyenlet levezetése és a replikáló portfólió meghatározása. Továbbá jellemzem a levezetés során használt folyamatokat.

A dolgozat ábráihoz a szimulációk Python programozási nyelven íródtak, ábrázolásuk pedig a Gnuplot parancssorból vezérelt függvény- és adatábrázoló programmal történtek.