

A súlyátrendező módszer alkalmazása lerajzolt gráfokra

Szakdolgozat - kivonat

Szabó Ádám

Témavezető: Tóth Géza

Az extrémális gráfelmélet témakörét többek között Mantel 1907-es tétele alapozta meg, amely arra a kérdésre ad választ, hogy legfeljebb hány éle lehet egy olyan gráfnak, amely nem tartalmaz háromszögeket. Turán Pál ezt az eredményt általánosította és publikálta 1941-ben. Ebből tudunk éles felső korlátot azon gráfok élszámára, melyek nem tartalmaznak részgráfként egy adott nagyságú teljes gráfot. Általánosan olyan típusú kérdésekre ad választ az extrémális gráfelmélet, hogy bizonyos tiltott, előre rögzített részgráftól vagy részgráfoktól mentes gráfban mekkora lehet a maximális vagy minimális élszám.

A dolgozat ennek egy geometriai változatával foglalkozik. Topologikus gráfnak nevezünk egy gráfot lerajzolva a síkra, melyben a csúcsoknak pontok, az éleknek pedig görbék felelnek meg. A geometriai gráf ettől abban tér el, hogy az éleket görbék helyett szakaszoknak rajzoljuk.

A legismertebb ilyen típusú eredmény a következő: Egy n csúcsú topologikus gráfnak, amelynek nincs két metsző éle (azaz síkgráf), legfeljebb $3n - 6$ éle lehet. A dolgozatban ehhez hasonló eredményeket tekintünk át, tiltott konfigurációként többek között 3 vagy több metsző éllel.

A bizonyításokban leginkább alkalmazott módszer a *súlyátrendező módszer* (*discharging method*) egy bizonyítási technika, amely legismertebb alkalmazása a Négyszín-tétel bizonyítása. A módszerrel első körben súlyokat osztunk szét a csúcsok, élek, tartományok vagy más objektumok között. Megállapítjuk az összsúlyt, majd bizonyos szabályok alapján átrendezzük a súlyokat. Az áttekintés során olyan esetekkel fogunk foglalkozni, ahol csak pozitív súlyú csúcs, él vagy tartomány adhat át súlyt. Fontos, hogy az összsúly nem változik az átrendezések során. Egy előre megadott \mathcal{F} konfiguráció, mely nem szerepel a gráfban, csak akkor szerepelhetne ha valamely lépésben negatív súlyokat adnánk át vagy megváltozna az összsúly. A helyesen alkalmazott súlyátrendező módszerhez jól megválasztott kezdeti értékek és jól megtervezett súlyrendező szabályok szükségesek, a bizonyításokban ezekre is mutatunk példákat.