A klasszikus összhangzattan axiomatikája
BSc szakdolgozat

Tóbiás András
Témavezető: G. Horváth Ákos

A klasszikus összhangzattan a XVIII. század második felében kialakult preskriptív zeneelméleti szabályrendszer, amelynek legfőként a bécsi klasszicista zeneszerzők művei felelnek meg. Legtisztább modelljét a négyszólamú összhangzattanpéldák adják, az ezek komponálására vonatkozó klasszikus szerkesztési elvek nagy részben J. S. Bach korábban született korálfeldolgozásain alapulnak. Dolgozatomban a klasszikus összhangzattan tárgykörébe tartozó zenei jelenségeket definiálom matematikai pontossággal, majd ezeket használva mondom ki a négyszólamú esetre vonatkozó szerkesztési elveket és vizsgálom a tárgyalt zenei jelenségek viszonyát.

A zeneelméleti tudásanyag logikai rendezése szükséges annak elősegítéséhez, hogy az összhangzattant tanuló középiskolások ne csak a szabályos összhangzattanpéldák komponálásának készségét sajátítsák el, hanem valóban mélyen megérthessék a klasszikus összhangzattant, átláthassák struktúráját. A dolgozat első fejezete a zeneelmélet matematikai alapozását adja, ennek első felében a felhangrendszer fizikai tulajdonságaiból és a ZFC axiómarendszerből kiindulva, az ezekből levezetett új fogalmakat egymásra építve adjuk meg az alapvető zenei jelenségek (pl. kvintkör, jóltemperált zongora, konszonancia, hármashangzat) definícióját.

A matematikai formalizálás lehetővé teszi összhangzattanilag illetve matematikailag értékes új állítások megfogalmazását is. Például az 1.3 fejezet egyszerű aritmetikát használva jut el a talán legfontosabb zeneelméleti eredményhez: a hangnemek trichotómiájához, a dúr, a moll és az itt megadott pikárdiai terces moll hangnemtípus viszonyának tisztázásához. Ezután a topológia eszközeivel adjuk meg a négyszólamú összhangzattanpéldák és lejátszásaik tulajdonságait, erre építve definiáljuk a funkciók és a tonalitás jellemzőit, így jutunk el az 1.6 fejezetben a tonalitás alaptételéhez és igazoljuk azt topológiai úton. A tétel állítása, hogy egy megvalósítható, szünetmentes négyszólamú összhangzattanpélda pontosan akkor tonális, ha az akkordváltási pontjain kívül megfelel a klasszikus összhangzattannak. Ezt a zeneelmélet évszázadok óta használja, de precízen megfogalmazni és bizonyítani csak matematikai úton tudjuk.

A tétel ismeretében lehetőség nyílik a legfontosabb klasszikus szerkesztési elvek (pl. szeptimhang és vezetőhang vezetése, oktáv- és kvintpárhuzamok kerülése, közös hang megtartása) pontos definiálására, négyszólamú kottapéldákkal szemléltetve. Ezután bemutatjuk az alterált, azaz egy adott hangnemhez tartozó, de módosított hangot is tartalmazó akkordokat. Az első fejezet végén egy kísérlet szerepel, melynek során – szekvenciális statisztikai próbával, a Wald-Wolfowitz-tételt használva – azt vizsgáltam, hogy egy, az 1.3 fejezetben megtalált harmadik hangnemtípusban, a pikárdiai terces mollban írott négyszólamú összhangzattanpéldát a kísérletben szereplő középiskolás növendékek inkább dúr vagy inkább moll hangneműnek éreznek-e. Az eljárás során a „moll" válaszok kerültek a kísérletsorozat befejezéséhez elegendő többségbe, ami arra utal, hogy a moll és a pikárdiai terces moll hangnem közös tulajdonságai, amelyeket a hangnemtípusok osztályozásánál bemutattunk, valóban fontos szerepet játszhatnak a moll hangnem érzetének kialakulásában.

A második fejezet célja a klasszikus összhangzattannak megfelelő modulációk, azaz hangnemváltások tárgyalása. Ehhez a szigorú négyszólamú szerkesztés egy egyszerűbb tárgyalási módját választjuk az általánosabb topologikus jellemzéshez képest, amelynek fontos szerepe volt a tonalitás alaptételének belátásánál és a Bach-korálok pontos definiálásánál. Bevezetjük a zeneművek jobbinvariáns szünetmentes kiterjesztését, akkordsorozatát és a modulációs félcsoportot, aritmetikai és algebrai módszerekkel vizsgáljuk tulajdonságaikat, majd ezek segítségével megnevezzük a modulációs szerkesztési elveket. Kottapéldák segítségével igazoljuk azt a több mint két évszázada ismert zeneelméleti tételt, hogy a jóltemperált zongorán bármely hangnemből bármely másikba létezik a klasszikus összhangzattannak megfelelő moduláció. Végül az utolsó részfejezetben definiáljuk a körzeneműveket és a periodikus tulajdonságokkal rendelkező zeneműveket, és az algebrai topológia segítségével (az $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ fedést használva) meghatározzuk ezek kapcsolatát. Megadjuk a kváziperiodikus akkordsorozatú zeneművek klasszikus összhangzattannak való megfelelésének szükséges és elégséges feltételét is.

Ez a mű alkalmazott matematikai munka, amelyet matematikus közönségnek szánunk, de bízunk abban, hogy logikai és szemléleti megalapozást, tárgyalási szerkezetet adhat egy zenészeknek szóló új magyar zeneelmélet-tankönyv létrehozásához.