Szakdolgozat kivonat

Operátor nyoma és a spektrális eltolásfüggvény

Frittmann Júlia

Témavezető: Horváth Miklós, BME Analízis tanszék

Szakdolgozatomban négy témát járunk körül, melyek mindegyike kapcsolódik egymáshoz valamely ponton. Először külön-külön vizsgáljuk meg ezeket, bevezetjük az alapvető fogalmakat és tételeket, melyek a téma mélyebb megértéséhez szükségesek, majd vázoljuk a kapcsolatot közöttük.

Először az integráloperátorokkal foglalkozunk, melyek a lineáris leképezések egy fontos osztályát alkotják. Megnézzük, mely feltételek garantálják korlátosságukat és kompaktságukat, amely kiemelt jelentőségű lesz a későbbiekben. Kompakt operátorok egy osztályán ugyanis az operátor nyoma a mátrix nyomának analógiájára definiálható, ezt Lidskii mutatta meg 1959-ben. Így szakdolgozatom második fejezete a trace class operátorokról szól, definiáljuk operátor nyomát és megvizsgáljuk alapvető tulajdonságait. Lidskii híres tételének bizonyításához pedig a hagyományos funkcionálanalízisbeli kelléktártól kissé elrugaszkodva komplex függvénytani módszereket használunk fel.

A harmadik rész néhány perturbációelméleti alapfogalommal kezdődik, majd megadjuk a Krein-féle spektrális eltolásfüggvény definícióját és véges dimenzióban ki is számoljuk. Foglalkozunk a perturbációs determináns tulajdonságaival, majd vázoljuk a kapcsolatot a perturbációs determináns logaritmusa és a spektrális eltolásfüggvény között. Megállapítjuk, hogy a perturbációs determináns a Nevanlinna függvényosztály tagja, így ez a kapcsolat az Aronszajn-Donaghue-féle reprezentációs tételből következik. Továbbá kiszámoljuk a ξ függvényt abban az esetben, amikor a perturbáció rangja egy, és ebből következtetünk a véges ill. végtelen rangú esetre is.

Ezután szóráselmélettel foglalkozunk, a matematika nyelvén leírva a kvantummechanika néhány jelenségét. A Schrödinger-egyenleten, hullámoperátoron és szórási operátoron át eljutunk végül a szórási mátrix definíciójáig, ami megadja a szabad részecske kezdeti és végállapota közötti összefüggést. Végül a szórási mátrix determinánsa és a spektrális eltolásfüggvény közötti híres egyenlettel zárjuk jelen dolgozatot.