

# Szakdolgozat kivonat

## Lokális Markov-láncok konvergenciája gráfok független ponthalmazain

Oláh Dániel

Témavezető: Pete Gábor, Matematika Intézet, Sztochasztika Tanszék

A dolgozat elején adunk egy vázlatos bevezetést a diszkrét Markov-láncok elméletébe, ezután felvetjük a következő problémát. Tekintsünk egy tetszőleges diszkrét eloszlást. Hogyan tudunk szimulálni egy véletlen elemet az adott eloszlás szerint? Egy példán keresztül szemléltetjük, hogy a megoldáshoz elengedhetetlen szükség van a Markov-láncok Monte Carlo módszerére. Így érkezzünk el a hard-core modellhez, a szakdolgozat fő témájához. Röviden, ez egy tetszőleges gráf független ponthalmazain értelmezett mérték, melyben minden egyes  $I$  független ponthalmaz súlya arányos a  $\lambda^{|I|}$  értékkel, ahol  $\lambda > 0$  tetszőleges paraméter. A  $\lambda = 1$  felel meg annak, hogy minden független ponthalmaz azonos súllyal szerepel. Több Markov-láncot is mutatunk, melyek alkalmasak a hard-core eloszlás szimulálására (bizonyos paraméterek mellett). Ezek közül a legegyszerűbbet, a Glauber dinamikát használjuk majd a szimulációk során.

Ezután megismerjük alaposabban a hard-core modellt. A modell legjobban a reguláris fán érthető meg, ennek fő oka a fa egyszerű szerkezete. Megmutatjuk, hogy a fán, a hard-core mértékre egy egyszerű, két állapotú elágazó Markov-láncoként is gondolhatunk. Összegyűjtjük a fán található fázisátmeneteket, megvizsgáljuk a hozzájuk tartozó kritikus paramétereket. Ezek közül az egyiket bizonyítjuk is, az előbb említett Markov-lánc segítségével. Rávilágítunk a reguláris fa és reguláris véletlen gráf szoros kapcsolatára is, ugyanis a szimulációk során 3-reguláris véletlen gráfokon tesztelünk.

A Glauber dinamika futtatása során a lokális sűrűségek elemzése nem volt túl kecsegtető, ezért a globális sűrűségről próbáltunk következtetéseket levonni. Segítségünkre volt a Propp-Wilson algoritmus is, amely a  $\lambda$  paraméter kis értékei mellett tökéletes mintákkal látott el minket. Sajnos a nagyobb (és minden bizonnyal érdekesebb) paraméterek esetén az algoritmus futási ideje oly mértékben megnőtt, hogy az idő és kapacitás végeessége miatt használhatatlanná vált. Ennek ellenére azonban sikerült bizonyos megfigyeléseket végezni.

Azt láttuk, hogy a Glauber dinamikának nincs szüksége annyi időre a sűrűség megkeveréséhez, mint amennyi a Propp-Wilson algoritmusnak kell az egész rendszer megkeveréséhez. Ha élünk azzal a feltételezéssel, hogy a Propp-Wilson algoritmus optimális gyorsasággal kever, vagyis nagyságrendileg mindenképp kell ennyi lépés az egész rendszer keveréséhez, akkor a megfigyelésünk azt sugallja, hogy a globális sűrűség hamarabb kever, mint az egész rendszer.

Budapest, 2015. május 22.