

Kivonat

Torma Kristóf: A Thrackle-sejtés

Témavezető: Tóth Géza

Több, mint 50 évvel ezelőtt John Horton Conway, brit matematikus Skóciában töltötte a szabadságát. Észrevett egy horgászt, aki a zsinórjára a tangled- összegabalyodott-szó helyett a thrackled- jelentés nélküli- szót használta. Innen kapta a nevét az alábbi probléma: Vegyünk egy egyszerű G gráfot, annak egy olyan lerajzolását a síkba, hogy bármely két élnek pontosan egy közös pontja van: vagy van egy közös végpontjuk, vagy valódi metszéssel pontosan egyszer metszik egymást és nincs közös végpontjuk. Conway megsejtette, hogy egy gráfban, amely lerajzolható ilyen módon, az élek száma nem haladhatja meg a csúcsok számát. Conway először egy üveg sört ajánlott annak, aki megoldja a problémát. Azóta a jutalom 1000 dollárra emelkedett, viszont a probléma megoldatlan maradt. A thrackle definícióját lehet általánosítani: egy thrackle általános thrackle, ha bármely két élnek páratlan sok közös pontja van. Az első lineáris korlátot az élszámra Lovász, Pach és Szegedy állította fel 1997-ben. Thrackle esetén ez $2n - 3$, általánosított thrackle esetén $3n - 4$. Mutattak egy relatív kicsi részgráfot is, amelyet egy thrackle nem tartalmazhat. Az eredményt először Cairns és Nikolayevsky javította meg a $\frac{3}{2}(n - 1)$, illetve $2n - 2$ felső korlátokkal. Az általánosított thrackle-re vonatkozó korlát éles. Nagyon érdekes eredmény, amelyet Fulek és Pach ért el 2011-ben. Adtak egy véges idejű algoritmust, ami vagy tovább javítja a felső korlátot, vagy megcáfolja a sejtést. Ehhez néhány gráf síkbarajzolhatóságát teszteli. Azonban ez nagy gráfokra nehéz, ezért a legjobb korlát, amit adtak $\frac{167}{117}n < 1.428n$. A dolgozat írása közben Yian Xu $1.4n$ -re javította a korlátot. Jelenleg ez a legjobb ismert. Pach és Sterling igazolta a sejtést abban az esetben, ha a gráf x -monoton, ami azt jelenti, hogy bármely élnek legfeljebb egy közös pontja van bármely függőleges egyenessel. A következő érdekes speciális esetről csak említést teszünk a dolgozatban. Kiterjeszthető a közös pont fogalma úgy, hogy háromféleképpen lehessen közös pontja két élnek: közös csúcs, metszéspont, vagy érintési pont. Ebben az esetben Pach, Radoičić és Tóth az $n + 1$ es korlátot adták x -monoton gráfokra. Egyébként a $\left\lfloor \frac{7n}{6} \right\rfloor \leq |E(G)| \leq cn \cdot \log^{12} n$ felső korlátot igazolták. Általában felteszik, hogy egy pontban legfeljebb két él találkozik. Viszont egy thrackle elfajult thrackle, ha tetszőleges számú él találkozhat két pontban. Ruiz-Vargas azzal az esettel foglalkozott, amikor háromféleképpen találkozhatnak az élek és a gráf elfajult thrackle.