Minimálisan 1-szívós gráfok minimális fokszámai

MSc szakdolgozat

Varga Kitti
BME TTK

Témavezető: Dr. Katona Gyula Y.

A dolgozatban szívós gráfokkal foglalkozunk. Egy G gráf t-szívós, ha tetszőleges S elvágó ponthalmaz esetén S-t elhagyva a gráf legfeljebb $|S|/t$ részre esik szét, ahol t pozitív valós szám. A definícióból könnyen láthatóan következik, hogy egy t-szívós gráf mindig $2t$-szeresen összefüggő, viszont ez fordítva nem feltétlenül igaz. Látható, hogy minél több éle van egy gráfnak, annál nagyobb lesz az összefüggőségi és szívóssági számuk is, ezért érdemes vizsgálni, mit lehet tudni azon gráfokról, amiből bármely élet elhagyva csökken az összefüggőségi illetve szívóssági számuk, azaz minimálisan k-összefüggőek illetve minimálisan t-szívósak. Mader belátta, hogy egy minimálisan k-szorosan összefüggő gráfnak van k-adfokú csúcsa. Ennek analógiájaként Kriesell megfogalmazta a következő sejtést: minden minimálisan 1-szívós gráf tartalmaz másodfokú pontot.

A dolgozatban először áttekintünk néhány szívóssággal kapcsolatos ismert tételt, majd konstruálunk tetszőlegesen nagy nemtriviális minimálisan 1-szívós gráfokat. Kriesell sejtéséről eddig nem ismert semmilyen eredmény, még olyan sem, amiben valamely gyengébb felső korlátot adnának a minimális fokszámra. Belátjuk, hogy minden minimálisan 1-szívós gráfnak van legfeljebb $(n/3+3)$-adfokú csúcsa. Végül néhány érdekes összefüggést vizsgálunk a $K_{1,3}$-mentes gráfok szívósságáról, és bebizonyítjuk, hogy a minimálisan 1-szívós $K_{1,3}$-mentes gráfok kizárólag a körök, így Kriesell sejtése ebben az esetben nyilvánvalóan fennáll.

Végül áttekintünk néhány eredményt, amelyek segíthetnek a tételünkben bizonyított fokszámkorlát javításában. A bizonyítás során használtuk a Dirac-tételt, ezért megvizsgáljuk a Dirac- és az Ore-tétel egy-egy lehetséges általánosítását [1, 2]. Mivel a minimálisan 1-szívós karommentes gráfokat sikerült karakterizálnunk, ezért foglalkozunk még további tiltott részgráfok és a szívósság kapcsolatával [3].

Hivatkozások

[1] D. Bauer, A. Morgana, E. Schmeichel, A simple proof of a theorem of Jung, *Discrete Math.*, 79 (1990) 147-152.

[2] A. Bigalke, H.A. Jung, Über Hamiltonische Kreise und unabhängige Ecken in Graphen, *Monatsh Math*, 88 (1979) 195-210.

[3] K. Ota, G. Sueiro, Forbidden Induced Subgraphs for Toughness, *J. Graph Theory*, 73 (2013) 191-202.