

Félcsoport részhalmazának szeparátora

című szakdolgozat kivonata

Baranyi Máté

Témavezető: Dr. Nagy Attila

A szakdolgozatban félcsoport részhalmazának szeparátorával foglalkozunk. A cél a szeparátorral kapcsolatos főbb eredmények összegyűjtése, összefoglalása. A szeparátor fogalmát Nagy Attila vezette be The separator of a subset of a semigroup című cikkében 1980-ban. Félcsoportok kutatásában az ideálok fontos szerepet játszanak. Vizsgálták S félcsoport tetszőleges A részhalmaza esetén mindazon S -beli x elemek $\text{Id } A$ -val jelölt halmazát, amelyekre $xA \subseteq A$ és $Ax \subseteq A$ teljesül. Ezt az A részhalmaz idealizátorának nevezzük. Természetes gondolat a komplementer részhalmaz idealizátorát is vizsgálni. Így jutunk el az A részhalmaz szeparátorához, ami $\text{Id } A$ és $\text{Id } \bar{A}$ metszete.

Először bevezetjük a szeparátor fogalmát, bemutatjuk annak alapvető tulajdonságait. Meghatározzuk a szeparátor-tartalmazó és -kizáró részhalmaz fogalmát. Rámutatunk a szeparátor alkalmazhatóságára az unitér részfélcsoportok, príSIDEÁLOK és szabad félcsoportok részhalmazai esetén.

A szeparátor segítségével körülírjuk a kommutatív félcsoportok monoid-kongruenciáit. Többek között megmutatjuk, hogy kommutatív félcsoportnak akkor és csak akkor van nem-univerzális monoid-kongruenciája, ha van nem üres szeparátorú nem triviális részhalmaza. Ezután szó esik félcsoportok kommutatív monoid-kongruenciáiról is.

Vizsgáljuk félcsoport ideáljának szeparátorát, ezt speciálisan test feletti négyzetes mátrixok és véges halmazon vett transzformációk esetén külön is vizsgáljuk. Belátjuk, hogy speciális félcsoportok (csoport, teljesen reguláris félcsoport, Clifford-félcsoport, teljesen 0-egyszerű félcsoport) részhalmazának szeparátora vagy üres vagy bizonyos feltétel mellett az is ugyanolyan speciális félcsoport lesz. A bitranszlációk segítségével felírunk két feltételt, amelyekkel könnyebben karakterizálhatunk különböző, a szeparátorral kapcsolatos tulajdonságokat. Megemlítünk permutatív félcsoportokkal kapcsolatos eredményeket is.

Foglalkozunk kommutatív félcsoport ideál által definiált főkongruenciája szerinti faktorfélcsoportjával. Ezután Gauss-gyűrűk multiplikatív félcsoportján vizsgálunk speciális oszthatósággal kapcsolatos kongruenciákat, és kimondunk egy összefüggést nem asszociált osztók számára a Gauss-gyűrűben. A munka kitekintéssel zárul, egy az addigi eredményeket használó számelméleti összefüggés kerül bemutatásra.

A szakdolgozat Nagy Attila témával kapcsolatos cikkeiben publikált eredményeket közli, teljes képet ad a félcsoport részhalmazának szeparátorával kapcsolatos főbb eredményekről.