Additív reprezentációfüggvények és partíciók

Kirsch Norbert

2016.05.27.

1 Kivonat

Vegyük a természetes számok egy olyan két halmazba történő felosztását, hogy egyik szám se szerepeljen mindkét halmazban, de mindegyik szerepeljen valamelyikben. Legyen ez a két halmaz A és B. Ekkor természetesen $A \cup B = \mathbb{N}$ és $A \cap B = \emptyset$.

Vezessünk be egy olyan függvényt ezeken a halmazokon, amelyik megadja hogy egy tetszőleges természetes szám két tagú összegként hányféleképpen állhat elő ha csak az egyik kijelölt halmazból vesszük a tagokat és a tagok sorrendje nem számít:

definíció 1 (Additív reprezentációfüggvény)**.**

Legyen $A \subset \mathbb{N}$ *úgy, hogy* $A = \{0 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots\}$
Ekkor értelmezzük az $r_A(n)$ *additív reprezentációfüggvényt a következőképpen:*

$$r_A(n) := |\{(a_i, a_j) : a_i < a_j, n = a_i + a_j\}|$$

A szakdolgozatban az alábbi kérdésekre keressük a válaszokat:

Megtudjuk-e választani a természetes számok felosztását A és B diszjunkt halmazokba, úgy hogy:

$$r_A(n) = r_B(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Esetleg létezik többféle ilyen felosztása is a természetes számoknak, vagy egyértelműek a diszjunkt halmazaink?

Mi történik, ha az additív függvény egyenlőségét csak egy bizonyos számtól kezdve követeljük meg? Akkor hogyan oszthatjuk ketté a természetes számokat, mennyivel lesz több a szabadságunk?

Mondhatunk-e valamit ha nem akarjuk a teljes természetes számok halmazát felbontani, helyette csak véges halmazokra vizsgáljuk az additív függvény egyezését. Milyen tulajdonságokkal bírnak az ilyen halmazok?

Mik azok a Hilbert kockák? Hogyan kapcsolódnak témakörünkhöz? Vajon megoldást kínálnak véges halmazok esetén a nyitott kérdésünkre?