Kivonat

A cap set probléma

Dudás Kinga

Témavezető: Pach Péter Pál

A szakdolgozatomban a polinom-módszer egy újszerű alkalmazását mutatom be, melynek segítségével bizonyos csoportokban háromtagú számtani sorozatot nem tartalmazó halmazok elemszámára a korábbiaknál lényegesen erősebb felső korlát adható.

A problémát először $\mathbb{Z}_4^n$ kapcsán vizsgáltam, ahol a legnagyobb háromtagú számtani sorozatot nem tartalmazó $A \subseteq \mathbb{Z}_4^n$ részhalmaz méretére Croot, Lev és Pach „exponenciálisan” kicsi felső becslést adtak. Az általam leírt bizonyítás kisebb változtatásoktól eltekintve megegyezik az általuk közzétett bizonyítással. Eredményként $|A| \leq 4^{\gamma n}$ adódott, ahol $\gamma \approx 0,926$ egy abszolút konstans, tehát $|A| < 3,611^n$.

Majd Ellenberg és Gijswijt cikke alapján ismertettem a bizonyítást, amivel $\mathbb{F}_q^n$ (q páratlan prímhatvány) esetében nyerhető felső becslés az $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ háromtagú számtani sorozatot nem tartalmazó részhalmaz méretére. Eszerint $|A| \leq 3f_q(n,(q-1)n/3)$, ahol $f_q(n,(q-1)n/3)$ az n-változós, legfeljebb $(q-1)n/3$-adfokú, $\mathbb{F}_q$ feletti monomok számát jelöli.

Bemutattam a módszer egy másféle megfogalmazását, a Tao-féle „slice-rang módszert”. Ezzel szintén az imént említett eredmény érhető el $\mathbb{F}_q^n$ kapcsán.

A módszernek az elmúlt évben számos alkalmazása született, ezek közül a napraforgósejtéssel kapcsolatos eredményeket részleteztem. Naslund és Sawin a slice-rang módszer segítségével belátták, hogy ha $\mathcal{F}$ napraforgómentes halmazcsaládja az $\{1,...,n\}$ részhalmazainak, akkor $|\mathcal{F}| \leq 3(n+1)\sum_{k\leq n/3}\binom{n}{k}$, és így $\mu_3^S \leq 3/2^{2/3} \approx 1,8898$, ahol μ_3^S az úgy nevezett Erdős-Szemerédi-napraforgómentes kapacitás.