



Szakdolgozat kivonat

Várkonyi Fanni

2017. május 16.

Az algebra területén belül szakdolgozatomban a félcsoporthok bizonyos témakörét dolgozom fel. Legfontosabb ezek közül is a félcsoporthok kongruenciái, melynek megállapítása azért is nehezebb itt, mint csoportok, vagy gyűrűk esetén, mert ott egyértelmű megfeleltetés van a csoportok normális részcsoporthjainál, illetve a gyűrűk ideáljai között.

Minden főbb tétel előtt kisebb állítások nyernek bizonyítást, illetve megismerjük a felhasznált definíciókat.

Első ilyen fő tételünkhöz három relációt kellett definiálnunk tetszőleges S félcsoporthon:

- $\sim$: Minden $a, b \in S$ esetén $a \sim b \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^+$ és $x, y \in S^1$: $xay = b^m$, azaz a osztja b elem valamely pozitív hatványát;
- σ : tranzitív lezártja a $\sim$ relációnak;
- λ : szimmetrikus lezártja σ -nak;

ahol S^1 az egységelemes félcsoporthot jelöli.

Ekkor λ a legszűkebb félháló-kongruencia az S félcsoporthnak, ahol a λ -osztályok félháló-felbonthatatlan félcsoporthok.

Második nagyobb bizonyított tétel szerint egy tetszőleges S félcsoporth akkor, és csakis akkor bontható fel arkhimédieszi félcsoporthok félhálójára, hogyha S Putcha-félcsoporth. Ilyenkor a legszűkebb félháló-kongruencia:

$$\mu = \{(u, v) \in S \times S : (\exists m, n \in \mathbb{N}^+) \quad u^m \in SvS \text{ és } v^n \in SuS\}.$$

Ezek után rengeteg kisebb tételt vizsgálunk annak érdekében, hogy megismerkedjünk a különböző Green-relációkkal, illetve reguláris félcsoporthokkal, emiatt könnyebb lesz megérteni a félprímekkel kapcsolatos ekvivalens állításokat.

Legtöbbször felhasznált ilyen tétel a Green-ekvivalencia, mely összefüggésbe hozza a Green-relációkat a regularitással.

Így lényegesen egyszerűbb bizonyítást kaphatunk azon ekvivalens állításokra, amelyekkel az S félcsoporthot csoportok vagy félcsoporthok uniójára bontjuk, particionáljuk, ahol S vagy bal-, vagy jobb- reguláris, vagy akár mindkettő, illetve belátjuk reguláris félcsoporth esetén, hogy a félcsoporth minden ideálja félprím.

A témával kapcsolatban ezen kívül még rengeteg tétel nyert bizonyítást, dolgozatomban a fontosabbakat emeltem ki, illetve azokat a lemmákat, amelyek ehhez szükségesek.