Abstract

Frozen percolation on the infinite binary tree

Tamás Kelemen

Supervisor: Balázs Ráth
Associate Professor
Institute of Mathematics, BUTE
Department of Stochastics

BUTE
December 15, 2017

Abstract

The aim of this paper is to give a detailed explanation of the model and the basic properties of the frozen percolation process on the infinite binary tree, to elaborate on the topic of endogeny in accordance with the process, and finally to gather more information by computer simulations about whether this process is endogenous.

Take an infinite binary tree with each of its edges randomly appearing as time t goes from 0 to 1. If upon becoming of infinite size, a connected cluster of edges stops growing then we call this the frozen percolation process, and the cluster in question becomes "frozen".

One key question is whether such a process exists at all, and after a rigorous construction of the process this will be proven. With Y, the time at which a certain edge becomes part of an infinite cluster, and U, the time of appearance of a certain edge, we are able to precisely describe the process.

We also detail notable features such as the size of finite clusters having the same probability law both at and after $t = \frac{1}{2}$, the critical time, after which infinite clusters begin to form.

Another key question is whether the time of appearance of edges U alone determines the outcome of the entire process, i.e. whether the process is endogenous, and this is equivalent to the question of the process satisfying the bivariate uniqueness property.

We are going to examine whether it does by taking the random variable Y in two separate universes, a and b, but taking for each edge the same U in both universes. If the only possible distribution of (Y^a, Y^b) is the diagonal measure, then two universes do produce the same outcome.

However, by two different types of computer simulations, we will conclude that there may be other joint distributions as well, showing strong likelihood of the process not being endogenous. The results of the two methods were consistent, and the shapes of the resulted distribution functions were unambiguously different from the diagonal measure.

Kivonat

A dolgozat célja, hogy egyrészt részletesen taglalja a végtelen bináris fán történő fagyott percoláció folyamatát, másrészt felvezesse a folyamat endogenitásának krédését, harmadrészt pedig hogy kétféle számítógépes szimuláció útján vizsgálja az endogenitást.

Vegyünk egy végtelen bináris fát, melynek minden éle véletlenszerűen jelenik meg egy $t \in [0, 1]$ időpontban. Ha egy megjelenő összefüggő élhalmaz végtelenné válása esetén az élhalmaz nem tud tovább növekedni, azaz "megfagy", akkor fagyott perkolációs folyamatról beszélünk.

Fontos kérdés, hogy egyáltalán létezhet-e ilyen folyamat, és a modell formális konstrukciójának segítségével meg is mutatható, hogy van ilyen folyamat. Két véletlen változó segítségével jól le lehet írni az egész folyamatot: Y egy él végtelen élhalmazba történő bekerülésének időpontja, és U egy él megjelenésének időpontja.

Ezen felül a folyamat több figyelemre méltó tulajdonságát is részletezzük, többek között azt is, hogy miután megkezdődik a végtelen nagy összefüggő élhalmazok megjelenése ($t > \frac{1}{2}$), a véges élhalmazok mérete ugyanolyan eloszlás szerint alakul, mint $t = \frac{1}{2}$-kor.

Egy másik fontos kérdés, hogy az élek megjelenésének időpontja determinálja-e a folyamat lefutását, vagyis hogy endogén-e a folyamat. Ez a kérdés ekvivalens azzal, hogy a folyamat teljesíti-e a kétváltozós egyértelműség kritériumát.

Ezt úgy vizsgáljuk, hogy két különböző (a és b) univerzumban futtatjuk a folyamatot, de azonos U-értékekkel. Ha (Y^a, Y^b) egyetlen lehetséges eloszlása a diagonális mérték, akkor a két univerzumban azonos módon fut le a folyamat.

Azonban két különböző szimulációs eljárással is arra a következtetésre jutottunk, hogy a diagonálistól különböző eloszlások is lehetnek. A két szimuláció eredménye konzisztens, és a kapott eloszlások alapja egyértelműen különbözik a diagonálistól. Ezek alapján lehetséges, hogy a folyamat nem endogén.