



## Diplomamunka kivonat

Várkonyi Fanni

2019. május 21.

Diplomamunkám, mely a gráfok, hipergráfok összefüggőségét taglalja, gráfelméleti témakörnek hangzik, mégsem ilyen szemszögből közelítjük meg.

A fő feladat az volt, hogy egy adott gráf esetén  $k$  lazán összefüggő komponenset keresünk, azaz csúcsainak olyan  $k$ -partícióját, ahol az osztályokon belüli élsűrűség nagyobb, mint az osztályok közötti. Erre, mint színezési vagy klaszterezési feladatra is tekinthetünk, és kérdéses az optimális  $k$  választása is. A problémát statisztikai feladatként kezeljük, és a célfüggvényben szereplő súlyozott vágásokat spektrális eszközökkel becsüljük. Megjegyezném, hogy ha nem a polinomiális időben lefutó spektrális felbontást használnám, nem csak a leszámolás lenne bonyolult, de egy  $n$  csúcsú gráf esetén az összes lehetséges  $k$ -ra ( $1 < k < n$ ), és az összes lehetséges  $k$ -partícióra végig kellene számolni a kívánt mennyiségeket, ami NP-teljes feladat.

A fenti vizsgálatokhoz Fiedler 1973-ban bevezette a gráf illeszkedési mátrixából számolt Laplace-mátrixot. Fiedler ezen Laplace-mátrix legkisebb pozitív sajátértéknek tulajdonított fontos szerepet, amelyről szóló tételek szintén megtalálhatók munkámban. Ezen sajátértékhez tartozó sajátvektort (Fiedler-vektor) vizsgálta Juhász és Mályusz 1977-ben, és koordinátáinak előjelével megadták a gráf két lazán összefüggő komponensét. Később Bolla és Tusnády általánosították a Laplace-mátrix fogalmát hipergráfokra is.

Általánosabb megállapításokhoz, azaz  $k$ -klaszterezhetőséghez a Laplace-mátrix  $k - 1$  legkisebb pozitív sajátértékét kell vizsgálni, majd a hozzájuk tartozó sajátvektorokat, hogy megtaláljuk a klasztereket. Ehhez a sajátvektorok alapján meghatározott csúcsreprezentációra lesz szükségünk, úgynevezett euklideszi reprezentációkra. Ez azt jelenti, hogy bármely  $k$  esetén használhatóak lesznek a felírt tételek, de  $k$  értékének növelése egyenértékű lesz a dimenzió növekedésével, ezáltal csak újabb komponens adunk a csúcsreprezentációkhoz, a már meglévő  $k$  komponens nem fog változni. Ezért az optimális  $k$  érték megállapításával is foglalkozunk, és hipergráfokra egy algoritmust is adunk.