A kétszeresen csonkolt Coxeter orthoszkém kövezésékhez tartozó kongruens és nem kongruens hiperszférafedések vizsgálata

Készítette: Eper Miklós

Témavezető: Dr. Szirmai Jenő

A hiperbolikus terek vizsgálata egyik első megalkotója, Bolyai János személye miatt is klasszikus magyar témának számít és ebben a témakörben Fejes Tóth L. munkásságán és az általa alapított iskolán keresztül számtalan nagyon fontos eredmény született (a teljesség igénye nélkül itt csak Fejes Tóth Gábor, id. és ifj. Böröczky Károly, Heppes Aladár, Bezdek Károly, Molnár Emil nevét említjük). Érdekes és sok vonatkozásában ma is nyitott problémákat tartalmazó kérdés a hiperbolikus terekben a kongruens gömbök optimális sűrűségű kitöltéseinek és fedéseinek a vizsgálata. A téma aktualitását jelzi, hogy n-dimenzióban ($n \geq 3$) még az sem tisztázott, hogy a legsűrűbb klasszikus gömbökkel történő gömbelhelyezés mikor valósul meg. Másik alapkérdés, hogy a „nem azonos típusú" horoszférakitöltések és fedések esetén adott dimenzióban milyen lesz az optimális gömbelrendezés. Fejes Tóth L. korszakos munkájában található ≈ 1.280-as sűrűségű horoszférafedés leírása, amely a $[6, 3, 3]$ parkettázáshoz kapcsolódódik.

A hiperszférafedésekről még kevesebbet tudunk, itt szintén ($n \geq 3$) esetén nyitott az optimális konfigurációk kérdése. A hiperbolikus síkon ($n = 2$) Vermes I. bizonyította, hogy a hiperszférafedések sűrűségére vonatkozó alsó korlát $\frac{\sqrt{12}}{\pi}$, de magasabb dimenzióban nincs hasonló eredmény a legkisebb sűrűségű fedésre. A témavezető eljárást adott meg a $\mathbb{H}^3$ hiperbolikus tér csonkolt tetraéderekre való felbontására a tér tetszőleges telített hiperszféraelrendezéséhez, így ezen Coxeter kövezések vizsgálata kulcsfontosságú. A témavezető további munkáiban a 3-, 4- és 5-dimenziós Coxeter kövezésekhez határozta meg a legritkább hiperszférafedéseket bizonyos kövezésekre vonatkozóan.

Jelen dolgozatban vizsgáljuk a $\mathbb{H}^3$ 3-dimenziós hiperbolikus tér kongruens- és nem kongruens hiperszférákkal történő fedéseit kétszeresen csonkolt Coxeter orthoszkémekkel történő kövezésekre vonatkozóan. Témavezetőm ugyanezekhez a kövezésekhez ≈ 0.81335-ös optimális pakolási sűrűséget ad meg, amely $[7, 3, 7]$ kövezéshez és a kongruens esethez tartozik. Témavezetőm szerzőtársaival a kétszeresen csonkolt orthoszkémekhez tartozó kövezések további vizsgálatai során szintén a $[7, 3, 7]$ kövezéshez tartozóan ≈ 1.26829-es fedési sűrűségű hiperszférafedést adott meg, amely jelenleg a legritkább hiperbolikus gömbfedés. Ezeket az eredményeket egészítjük ki a maradék kongruens eset, illetve a nem kongruens esetek vizsgálatával. Python programozási nyelv segítségével megmutatjuk, hogy a nem kongruens hiperszférafedések esetében az optimális elrendezés a $[7, 3, 8]$ kövezéshez tartozik ≈ 1.28228-as sűrűséggel. Továbbá vizsgáljuk az $[u, 3, 7]$ ($6 < u < 7, u \in \mathbb{R}$) kövezéshez kapcsolódó lokálisan realizálódó hiperszférafedést, amely $u \approx 6.45953$ esetén veszi fel minimumát ≈ 1.26454-es sűrűséggel, azonban ezen lokálisan optimális fedéshez tartozó parkettázás nem terjeszthető ki a teljes hiperbolikus térre.