

Diszkrét fagyási idejű fagyott perkolációs modell endogenitása

Szőke Márton Péter

Témavezető: Ráth Balázs

Kivonat

A diplomamunkámban egy speciális fagyott perkolációs modell endogenitását vizsgáltam. A modell alapja egy bináris fa, ahol minden csúcshoz hozzárendelünk egymástól függetlenül egy $\text{UNI}[0,1]$ eloszlású aktiválási időt, illetve egy κ számot, ami $1/2$ - $1/2$ valószínűséggel 1 vagy 2. Ha ez 1, akkor a csúcsnak az egyik gyerekét (annak összes leszármazottjával együtt) elhagyjuk, viszont ekkor a csúcsban egy lyuk van a kezdeti időpontban. Ezután a lyukak betömődnek az aktiválási idejükben. Viszont a csúcs megfagy abban az első fagyási időpontban, amikor a csúcsból egy végtelen (lyukak és fagyott csúcsok nélküli) út indul. Ezt a rendszert endogénnek nevezzük, ha a gyökér állapota mérhető az aktiválási idők és κ értékek σ -algebrájára nézve.

A dolgozatban ennek egy speciális esetét vizsgáltam, amikor a lehetséges fagyási időpontok egy geometriai sorozatot alkotnak. Aldous és Bandyopadhyay egy tétele alapján az endogenitás ekvivalens a kétváltozós egyértelműséggel, azaz azzal, hogy a kétváltozós Rekurzív Eloszlás Egyenletnek egyértelmű a megoldása. Ezt az egyenletet sikerült visszavezetni egy, az eloszlást jellemző kétváltozós függvény rekurziójára, amelynek a fixpontjait kellett meghatározni. Ehelyett csak skála-invariáns mértékekkel foglalkoztam, ahol az egyenlet egy egyváltozós függvény rekurziójára egyszerűsödik. Ennek mindig van egy triviális megoldása (ami a diagonális mértékhez tartozik). A dolgozatomban sikerült igazolni, hogy pontosan akkor van másik olyan megoldása is a rekurciónak, amelyből generálható egy megfelelő valószínűségi mérték, ha a fagyási időpontok mértani sorozatának hányadosa nagyobb, mint egy adott $\theta^* \approx 0.63$ érték. Ebből következik, hogy a rendszer nem endogén, ha a hányados nagyobb, mint θ^* . Viszont kisebb hányados esetén az endogenitás bizonyításához ez nem elég, hiszen csak azt láttuk be, hogy nincs másik skála invariáns megoldása a Rekurzív Eloszlás Egyenletnek. Ezért megfogalmaztam sejtéseket, melyek a folytonos esetben bizonyítottak és valószínűleg a bizonyítások megfelelő módosításokkal a vizsgált esetben is működnek. Másrészt szimulációkat is végeztem, melyek szintén alátámasztják az állításokat. Ezen sejtések segítségével, illetve általánosabb eredmények használatával már az is könnyen belátható, hogy ha a fagyási időpontok sorozatának hányadosa nem nagyobb θ^* -nál, akkor a rendszer endogén.