

Kivonat

A páros gráfok teljes párosítási feladata majdnem-NC-beli

Tanács Viktória

A dolgozatom célja a gráfok és mátrixok közötti kapcsolatok segítségével egy páros gráfbeli teljes párosítás keresési módszert leírni, mely majdnem-NC²-ben van. Fenner, Gurjar és Thierauf 2016-os cikke alapján mutatunk egy uniform és determinisztikus módszert $\log n$ -ben polinomiális idővel, viszont valamivel több, mint polinomiális számú processzorra (ez $n^{O(\log n)}$ elemi processzort jelent). Ez egy úgynevezett majdnem-NC algoritmus. A gráfhoz hozzárendelünk egy mátrixot, melybe az élek súlyai kerülnek, ennek determinánsát vizsgáljuk, mely ha nem nulla, akkor a gráfban biztosan van teljes párosítás. A Schwartz–Zippel-lemma segítségével hatékony randomizált és párhuzamos algoritmus adható a párosítás létezésének eldöntésére. A Csánky-tételt alkalmazva a determináns számolása elvégezhető NC algoritmussal és ismert az izolációs lemma miatt, hogy egy jó véletlen súlyfüggvény konstruálása polinom időben lehetséges. Bevezetjük a párosítási politópot, ami az élek számával egyenlő dimenziós térben elhelyezkedő konvex burka a teljes párosításoknak és keresünk egy egyenletrendszert, amely karakterizálja a politópot. Ehhez felhasználjuk az egészértékűségi lemmát, mely bizonyításában megemlékezünk egy magyar matematikusról Baranyai Zsoltról, és a Birkhoff–Neumann-tételt is, amely determinisztikus algoritmust ad arra, hogy a duplán sztochasztikus mátrixokat hogy írhatjuk fel permutációmátrixok konvex kombinációjaként. A Fenner–Gurjar–Thierauf-algoritmust részletesen vizsgáljuk, megkonstruálunk egy izoláló súlyfüggvényt, ahol a minimális súlyú teljes párosítás egyértelmű, ilyenkor a gráfhoz rendelt mátrix determinánsa csak akkor nulla, ha a gráfban nincs teljes párosítás. A súlyfüggvényünk létrehozásában is van szerepe a véletlennek, egy izolációs lemma biztosítja, hogy nem kell exponenciálisan sok súlyfüggvényt konstruálni egy izoláló találásához. Ismertetjük a szép kör és a cirkuláció fogalmát, ezek segítségével keresünk izoláló súlyfüggvényt. Célunk először olyan súlyfüggvényt találni, ami csak a szép körök egy meghatározott halmazára ad nem nulla cirkulációt, ehhez gráfelméleti lemmákat látunk be és egy számelméleti lemmát is, ami a legkisebb közös többszörösre ad egy alsó korlátot. Létrehozunk egy segédgráfokból álló sorozatot, melynek első tagja az eredeti gráf, a többi az előtte lévő gráf összes minimális súlyú teljes párosításának az uniójából képezzük. Ekkor bebizonyítjuk, hogy a nem nulla cirkulációt adó körök nem lesznek benne a sorozat későbbi elemeiben. Foglalkozunk az adott hosszú körök számával egy gráfban és ezek következményeképpen konstruálunk egy izoláló súlyfüggvényt, melynek súlyaira tudunk felső korlátot adni. Ezt úgy tesszük meg, hogy a gráfsorozat minden eleméhez rendelünk egy súlyfüggvényt, majd ezeket súlyozzuk. Ezzel a súlyfüggvénnyel belátjuk a fő eredményt, mely szerint majdnem-NC²-ben eldönthető, hogy egy páros gráfban van-e teljes párosítás. A dolgozat végén kitekintünk a gráfok és mátrixok közötti kapcsolatra általánosan és az ezekhez kapcsolódó friss eredményekre és kérdésekre.