

Szakdolgozat kivonat

Középértékek Gauss-féle iterációja és Gauss-féle kompozíciója

Sánta Dávid

Témavezető: Dr. Burai Pál József

Először a dolgozat alapjául szolgáló elméleti háttér megalapozásaként a középértékek fogalmát és tulajdonságait tárgyaljuk. Kiemelt figyelmet fordítunk a Hölder-közepre, melyeket részletesen bemutatunk mind a bevezető részben, mind a későbbi tárgyalás során. Az elméleti alapozást követően rátérünk a dolgozat címében is megjelölt témakörök részletes tárgyalására. A középértékek Gauss-féle iterációját a következőképpen definiáljuk. Legyenek M_1 és M_2 közepek, valamint x, y kezdőértékek. Ekkor az

$$\begin{aligned}x_0 &:= x & y_0 &:= y \\x_{n+1} &:= M_1(x_n, y_n) & y_{n+1} &:= M_2(x_n, y_n)\end{aligned}$$

iteráció sorozatot az (M_1, M_2) pár Gauss-féle iterációjának nevezzük az x, y kezdeti értékek mellett. A Gauss-féle kompozíciójuk, amennyiben létezik, a közös határérték, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n =: M_1 \otimes M_2(x, y).$$

A témakört megteremtő eset, amely a definíció azon esete, amikor $M_1 = A$, $M_2 = G$, tehát amikor a jól ismert aritmetikai és geometria közepek Gauss-féle iterációját tekintjük. Ezt már Lagrange is vizsgálta, végül Gauss határozta meg $A \otimes G$ képletét.

$$A \otimes G(x, y) = \frac{1}{\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{x^2 \cos^2(t) + y^2 \sin^2(t)}}}, \quad \text{ha } x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Ezen formula meghatározása jelentős lépés volt a numerikus analízis területén is a benne szereplő elliptikus integrál miatt, mely kiszámítása számos gyakorlati problémában kívánatos, azonban zárt formulával nem lehetséges. Schwab-Bochart algoritmusának eredményét is ismertetjük ezen közepekre. Carlson ért el egy jelentős áttörést, amikor együttesen meghatározta 4 közép összes lehetséges kombinációjának Gauss-kompozícióját.

$$\begin{aligned}M_1(x, y) &= \frac{x+y}{2}; & M_2(x, y) &= \sqrt{xy}; \\M_3(x, y) &= \sqrt{x \frac{x+y}{2}}; & M_4(x, y) &= \sqrt{\frac{x+y}{2} y}.\end{aligned}$$

Érdemes megjegyezni, hogy az előbbi két iteráció 1-1 esete a Carlson által tárgyaltnak.

Bemutatjuk az eddigiek egy viszonylagos megfordítását is. Ezen invertált módszer esetén azon feltételezésből indulunk ki, hogy az általunk tekintett közép maga egy Gauss-kompozíció, és keressük azon két közepet amelyek Gauss-kompozíciójaként előáll a kívánt közép.

A korábban megelölegezett Hölder-közepek felhasználásával is tárgyaljuk a Gauss-kompozíciókat, tehát amikor mind az M_1 és M_2 közepek Hölder-közepek. Az említett Gauss-féle számtani-mértani közép is ilyen eset, mivel a számtani és mértani közepek is Hölder-közepek. Ebből kiindulva sikeresen általánosítható a geometriai és tetszőleges Hölder-közép Gauss-kompozíciója. Azon esetekben is sikeresen meghatározható a Hölder-közepek Gauss-kompozíciója, amikor a Gauss-kompozíció a geometriai közép lesz. Ezeket összefoglalva a Hölder-közepek Gauss-kompozíciója jelenleg akkor ismert, ha az M_1, M_2 közepek valamelyike, vagy maga $M_1 \otimes M_2$ a geometriai közép. Egyéb esetek még nem meghatározottak, továbbra is nyitott kérdést képeznek. A következő kutatási lépés lehet a tetszőleges Hölder-közepek Gauss-kompozíciójának meghatározása, célszerűen először $H_1 \otimes H_2$ meghatározása, ahonnan általánosíthatunk $H_p \otimes H_q$ képletére tetszőleges $p, q \in \mathbb{R}$ esetén.