

Kivonat

A dolgozat fő célja két speciális alakú diofantikus egyenlet – az $x^2 + A = y^n$ és a $Dx^2 + 2^{2m} = y^p$ – egész számok körében vett megoldásainak vizsgálata algebrai számelméleti eszközökkel. A dolgozat nem egyszerűen ezek megoldását tűzi ki célul, hanem bemutatja azt az elméleti háttérrel, amelynek segítségével ezen egyenletek kezelhetők.

Szemlélet és módszertan

A dolgozat központi szemlélete az ideálok elméletére és az azokra vonatkozó egyértelmű prímeideál-felbontásra épül. A megközelítés lényege, hogy a hagyományos számelméleti nehézségek (mint a számelmélet alaptételének esetleges hiánya) ideálokvaló számolással megkerülhetők. Ezt a „p-hatvány elv” alkalmazása teszi lehetővé.

Főbb eredmények

1. $x^2 + A = y^n$ típusú egyenlet:

- Megadott feltételek mellett (például: $\text{Inko}(h(\sqrt{-A}), n) = 1$) a megoldások explicit alakban levezethetők.
- A megoldhatóság feltétele egy konkrét egész együtthatós polinom egész gyökének létezése.
- Számos meg nem oldhatósági esetet is sikerült bizonyítani, például ha n páros, ha $n = p^k$ és p osztja A -t, vagy ha y páros.

2. $Dx^2 + 2^{2m} = y^p$ típusú egyenlet:

- Bevezetésre kerültek a Lehmer-párok és a hozzájuk kapcsolódó fogalmak (primitív osztók, defektivitás).
- Bizonyítást nyert, hogy bizonyos feltételek mellett (például: D páratlan négyzetmentes, $p > 3$, x páratlan) az egyenletnek nincs egész megoldása.
- A megoldatlanság kulcsa a Lehmer-számok primitív osztóinak hiánya és az ún. totálisan nemdefektív számok jellemzése.

Tézisek és konklúziók

- Az ideálelmélet hatékony eszköz a klasszikus számelméleti problémák kezelésére, különösen, ha a számelmélet alaptétele nem érvényes.
- Az ideálosztályok és osztályszámok fogalma központi szerepet játszik a „p-hatvány elv” igazolásában.
- A dolgozat önálló hozzájárulása a 2. lemma, a 19. és a 24. tétel bizonyítása.