

Fourier vizsgatematika MSc záróvizsgára

(Matolcsi Máté, 2019)

1. Fourier analízis véges Abel csoportokon: karakterek, duális csoport, alaptulajdonságok (karakterek ortogonalitása, Plancherel formula, konvolúció Fourier transzformáltja, eltolás és moduláció), maximális Fourier együttható, random halmazok, Gauss összegek, egyenletek megoldhatósága véges Abel csoportokon, FFT és alkalmazása nagy számok szorzására, határozatlansági reláció véges csoportokon, Dirac-fésű Fourier transzformáltja avagy a véges Poisson összegzési formula.
2. Fourier sorok: Fejér tétele az átlagok egyenletes konvergenciájáról. Következmények: folytonos fv-t meghatározzák a Fourier együtthatói, a trigonometrikus polinomok sűrűn vannak, Weierstrass-tétele a polinomok sűrűségéről, a Fourier bázis teljessége, Parseval formula, L^2 és l^2 izometriája, legjobb közelítés L^2 -ben. L^1 fv-ek Fourier transzformáltja: alaptulajdonságok (eltolás és moduláció, konvolúció és szorzás, legnagyobb Fourier együttható becslése a fv L^1 -normájával), Riemann-Lebesgue lemma, Young egyenlőtlenség konvolúciókra, L^1 fv-t is meghatározzák a Fourier együtthatói, a konvolúció kisimít. C^2 fv-re vonatkozó egyenletes konvergencia tétel, Riemann lokalizációs lemma, Dini kritérium a konvergenciára, Gibbs jelenség a szakadási helyeken. Fourier sorok alkalmazásai: Poisson mag és a Dirichlet feladat, Wirtinger egyenlőtlenség, hőterjedés köralakú vezetékben illetve intervallumon, húr rezgései.
3. Fourier transzformáció \mathbb{R} -en: a Schwartz-féle függvényosztály, a Fourier transzformáció bijekció \mathcal{S} -en és érvényes az inverziós formula és a Parseval egyenlőség, a Fourier transzformáció L^2 -re való kiterjesztése, Hermite függvények. L^1 elmélet: alaptulajdonságok (f^\wedge folytonos, f^\wedge sup-normája becsülhető f L^1 normájával, Riemann-Lebesgue lemma, konvolúció és szorzás, eltolás és moduláció, dilatáció, deriválás, injektivitás). Fv közelítése konvolúcióval, a konvolúció kisimít. Határozatlansági reláció, Poisson összegzési formula, Shannon mintavételezési tétel, néhány konkrét függvény Fourier transzformáltja. Alkalmazások: centrális határelszlász tétel, Minkowski tétel (többdimenziós Fourier transzformálttal), ablak-Fourier-transzformált. Hausdorff-Young egyenlőtlenség, Wiener sűrűségi tétele, Paley-Wiener tétel.
4. Disztribúciók és Fourier transzformáltjuk, Sobolev terek definíciója. Laplace transzformált: definíció, kapcsolat a Fourier transzformációval, kezdeti érték feladatok megoldása, stabilitás, késleltetett differenciálegyenletek stabilitása. Waveletek: Haar-wavelet, multirezolúciós analízis, Shannon wavelet.
5. Ortogonális polinomok, Legendre-, Jacobi-, Hermite-, Csebisev-polinomok. Ortogonális polinomok gyökei, Gauss kvadratúra. A Csebisev polinomok extrémális approximációs tulajdonsága. Approximáció elmélet elemei: Lagrange interpoláció, Faber tétel, Kharshiladze-Lozinski tétel, Lebesgue konstans és Lebesgue tétel, Markov-egyenlőtlenség, Bernstein-egyenlőtlenség, Korovkin tétel.