Statisztika 2 vizsga mintafeladatok (2018)

1. Keressen minimális elégséges statisztikát a geometriai és az exponenciális eloszlás paraméterére! Tagja-e a geomatriai és az exponenciális eloszlás az exponenciális eloszláscsaládnak?
2. Legyen $X_1, \dots, X_n$ fae. minta az
$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, \text{ ha } 0 < x < 1, \\ 0, \text{ különben} \end{cases}$$
sűrűségfüggvénnyel megadott eloszlásból, ahol $\theta > 0$ paraméter.
   a. Keressen elégséges statisztikát θ-ra a minta alapján!
   b. Adjon maximum likelihood becslést θ-ra a minta alapján!
   c. Torzítatlan becslést ad-e a talált maximum likelihood becslés θ-ra?
   d. Tagja-e a fenti eloszlás az exponenciális eloszlácsaládnak? Miért igen, ill. miért nem?
3. Legyen $X_1, \dots, X_n$ fae. minta az
$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{2\theta^3}, \text{ ha } -\theta < x < \theta, \\ 0, \text{ különben} \end{cases}$$
sűrűségfüggvénnyel megadott eloszlásból, ahol $\theta > 0$ paraméter.
   a. Keressen elégséges statisztikát θ-ra a minta alapján!
   b. Adjon maximum likelihood becslést θ-ra a minta alapján!
   c. Tagja-e a fenti eloszlás az exponenciális eloszlácsaládnak? Miért igen, ill. miért nem?
4. Legyen $X_1, \dots, X_n$ fae. minta λ paraméterű Poisson-eloszlásból.
   a. Keressen elégséges statisztikát λ-ra!
   b. Blackwellizálja X_1-t egy elégséges statisztikával!
   c. Adjon meg X_1 függvényében torzítatlan becslést a $\psi(\lambda) = \lambda^2 e^{-\lambda}$ paraméterfüggvényre, majd blackwellizálja azt egy elégséges statisztikával!
   d. Magyarázza meg miért jutott ugyanarra az eredményre a kétféle blackwellizálás során!
5. Legyen $X_1, \dots, X_n \sim \Gamma_\alpha(\lambda)$ fae. minta, ahol $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ ismeretlen valós paraméterek! Adjon momentum becslést az (α, λ) paraméterpárra a fenti n-elemű minta alapján!
6. Legyen $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{U}(a, b)$ fae. minta, ahol $a < b$, ismeretlen valós paraméterek! Adjon ML- és momentum becslést az (a, b) paraméterpárra a fenti n-elemű minta alapján!
7. Tekintsük az
$$f_{a,p}(x) = \begin{cases} \frac{pa^p}{x^{p+1}}, \text{ ha } x \geq a, \\ 0, \text{ egyébként} \end{cases}$$
sűrűségfüggvényű Pareto-eloszlást, ahol $a, p > 0$ paraméterek. (Ez az eloszlás elsősorban a közgazdaságtanban fordul elő, pl. a jövedelemeloszlás egy adott országban jól

közelíthető Pareto-eloszlással, ahol a és p az országra jellemző állandók.) Az $X_1, \ldots, X_n$ független n-elemű minta alapján adjon maximum likelihood becslést az a, p paraméterekre!

8. Az $X_1, \ldots, X_n$ fae. minta alapján adjon Bayes-becslést a Poisson-eloszlás paraméterére, ha annak a priori eloszlása $\Gamma_\alpha(\lambda)$, ahol $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ adott valós számok!
9. Legyen $X_1, \ldots, X_n$ fae. minta a következő sűrűségfüggvénnyel megadott eloszlásból:

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{(1+x)^{\theta+1}}, \qquad \text{ha} \quad x \geq 0,$$

és 0 különben ($\theta > 0$ paraméter). Számolja ki a fenti minta Fisher-információját!

10. Legyen $X_1, \ldots, X_n$ fae. minta az $\mathcal{N}(\mu, 1)$ eloszlásból! Adjon Bayes-becslést μ-re, ha μ a priori eloszlása $\mathcal{N}(0, 1/9)$!
11. Adjon Bayes-becslést a geometriai eloszlás paraméterére az $X_1, \ldots, X_n$ fae. minta alapján, ha a paraméter a priori eloszlása $(0,1)$-en folytonos egyenletes! Vizsgálja meg a kapott becslés viselkedését $n \to \infty$ esetén!
12. Korábbi megfigyelések alapján három párt népszerűsége rendre: $\frac{2+\theta}{4}$, $\frac{1-\theta}{2}$, $\frac{\theta}{4}$, ahol $0 < \theta < 1$ paraméter. 100 embert megkérdeztek, és közülük rendre 50,30,20 támogatta az egyes pártokat.
    a. Adjon maximum likelihood becslést θ-ra a minta alapján!
    b. Határozza meg egy 100 elemű (fenti eloszlásból vett) minta Fisher-információját!
13. Bizonyítsa be, hogy a λ paramérterű Poisson eloszlások családja monoton likelihood-hányadosú ($\lambda > 0$)! Az $X_1, \ldots, X_n$ fae. Poisson minta alapján konstruáljon ε terjedelmű, egyenletesen legerősebb véletlenített próbát a következő alternatívák közötti döntésre:

$$H_0 : \lambda \leq 3 \quad , \quad H_1 : \lambda > 3.$$

Adja meg a randomizált próba konstansait $n = 3$ és $\varepsilon = 0.1$ esetén!

14. Legyen $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{P}(\lambda)$ fae. minta! Alkalmazzon likelihood-hányados próbát a

$$H_0 : \lambda = 3 \quad \text{vers.} \quad H_1 : \lambda \neq 3$$

alternatívák közötti döntésre (azaz adja meg az ε terjedelmű próba kritikus tartományának alakját), ha
    a. $n = 1$;
    b. n "nagy".

15. Legyen $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ fae. minta!
    a. Konstrualjon egyenletesen legerősebb próbát a

$$H_0 : \lambda = 1 \quad \text{vers.} \quad H_1 : 0 < \lambda < 1$$

alternatívák közötti döntésre (azaz adja meg az ε terjedelmű próba kritikus tartományának alakját és azt, hogy hogyan határozná meg az ε-hoz tartozó kritikus értéket).

b. $n = 1$, egyetlen x realizáció és $\varepsilon = 0.01$ mellett számolja ki a kritikus értéket és adja meg a próba erőfüggvényét! Vizsgálja meg az erőfüggvény monotonitását az ellenhipotézisbeli λ értékekre $(0 < \lambda < 1)$.

16. Legyen $X_1, \ldots, X_n$ fae. minta az

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 3e^{3\theta-3x}, \text{ ha } x \geq \theta, \\ 0, \text{ különben} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel megadott abszolút folytonos eloszláscsaládból (θ valós paraméter)!

a. Monoton likelihood-hányadosú-e az eloszláscsalád? Miért?

b. Konstruáljon ε terjedelmű egyenletesen legerősebb próbát a

$$H_0 : \theta = 1 \quad versus \quad H_1 : \theta > 1$$

alternatívára tetszőleges $0 < \varepsilon < 1$ esetén!

c. Adja meg a kritikus tartományt az $\varepsilon = 0,05$ esetben!

d. Az $\varepsilon = 0,05$ esetben írja fel az erőfüggvényt! Vizsgálja meg az erőfüggvény viselkedését az ellenhipotézisbeli paraméterértékek $(\theta > 1)$, majd n függvényében!