Algebra 2, Galois-elmélet feladatsor, 2023

1. (1/4) Adjuk meg $\cos 20^\circ$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ fölött.

2. (1/5) Adjuk meg $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ fölött!

3. (1/6) Legyen α az $x^3-2x^2+x+1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom egyik gyöke. Adjuk meg α^2+2 reciprokát α legföljebb másodfokú polinomjaként!

4. (2/3) Hányadfokú az F/K bővítés, ha F az f felbontási teste, és

a) $K=\mathbb{Q}$, $f=x^6-1$
b) $K=\mathbb{Q}$, $f=x^6-2$
c) $K=\mathbb{F}_7$, $f=x^6-1$
d) $K=\mathbb{F}_5$, $f=x^6-2$

5. Tegyük föl, hogy K_1 és K_2 résztestek egy K testben, továbbá $|K_1|=64$, $|K_2|=256$. Hány eleme lesz a K_1 és K_2 által generált résztestnek K-ban?

6. (2/7) Tegyük fel, hogy $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$ olyanok, hogy $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ és $\alpha+\beta+\gamma$ is algebrai számok $\mathbb{Q}$ fölött. Bizonyítsuk be, hogy α, β és γ is algebraiak.

7. (3/1)Legyen α az x^3-2 polinom egyik nem valós gyöke. Határozzuk meg α fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ fölött, és határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\alpha)\cap\mathbb{R}$ résztestet! Igaz-e, hogy ha $K \le L \le M$, és $\alpha \in M$, akkor α L fölötti foka osztója α K fölötti fokának?

8. (4/3) Határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \mid \mathbb{Q}$ bővítés Galois-csoportját.

9. (4/4) Határozzuk meg a x^3-2 polinom Galois-csoportját $\mathbb{Q}$ fölött és $\mathbb{F}_3$ fölött

10. (4/5) Bizonyítsuk be, hogy ha egy harmadfokú, racionális együtthatós, irreducibilis polinomnak nem mindegyik gyöke valós, akkor a Galois-csoportja S_3-mal izomorf.

11. (5/11) Az alábbiak közül melyik polinomok gyökeit lehet az alapműveletek és gyökvonás segítségével felírni?

a) x^4+2x^3-5x+1
b) x^5-15x^4+6
c) x^6-2x^2+4

A sorszámok a `www.math.bme.hu/~lukacs/bboard/alg2/2018` *feladatsoraira vonatkoznak, és ezen a címen az adott feladatok megoldását is meg lehet nézni.*