

Algebra 2 gyakorló feladatsor, 2025

1. (1/4) Adjuk meg $\cos 20^\circ$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ fölött.
2. (1/5) Adjuk meg $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ fölött!
3. (1/6) Legyen α az $x^3 - 2x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom egyik gyöke. Adjuk meg $\alpha^2 + 2$ reciprokát α legfőbb másodfokú polinomjaként!
4. (2/3) Hányadfokú az F/K bővítés, ha F az f felbontási teste, és
 - a) $K = \mathbb{Q}, f = x^6 - 1$
 - b) $K = \mathbb{Q}, f = x^6 - 2$
 - c) $K = \mathbb{F}_7, f = x^6 - 1$
 - d) $K = \mathbb{F}_5, f = x^6 - 2$
5. Tegyük föl, hogy K_1 és K_2 résztestek egy K testben, továbbá $|K_1| = 64, |K_2| = 256$. Hány eleme lesz a K_1 és K_2 által generált résztestnek K -ban?
6. (2/7) Tegyük fel, hogy $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ olyanok, hogy $\alpha\beta\gamma, \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ és $\alpha + \beta + \gamma$ is algebrai számok $\mathbb{Q}$ fölött. Bizonyítsuk be, hogy α, β és γ is algebraiak.
7. (3/1) Legyen α az $x^3 - 2$ polinom egyik nem valós gyöke. Határozzuk meg α fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ fölött, és határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{R}$ résztestet! Igaz-e, hogy ha $K \leq L \leq M$, és $\alpha \in M$, akkor α L fölötti fokos osztója α K fölötti fokának?
8. (4/3) Határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) | \mathbb{Q}$ bővítés Galois-csoportját.
9. (4/4) Határozzuk meg a $x^3 - 2$ polinom Galois-csoportját $\mathbb{Q}$ fölött és $\mathbb{F}_3$ fölött
10. (4/5) Bizonyítsuk be, hogy ha egy harmadfokú, racionális együtthatós, irreducibilis polinomnak nem mindegyik gyöke valós, akkor a Galois-csoportja S_3 -mal izomorf.
11. (5/11) Az alábbiak közül melyik polinomok gyökeit lehet az alapműveletek és gyökvonás segítségével felírni?
 - a) $x^4 + 2x^3 - 5x + 1$
 - b) $x^5 - 15x^4 + 6$
 - c) $x^6 - 2x^2 + 4$
12. Tekintsük a következő kommutatív diagramot, ahol a felső sor egzakt:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\
 A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C'
 \end{array}$$

Mutassuk meg, hogy ha α, γ és f' monomorfizmusok, akkor β is monomorfizmus.

13. Határozzuk meg az alábbi tenzorszorzatokat:

a) $\mathbb{Z}_3 \otimes_{\mathbb{Z}_{21}} \mathbb{Z}_7$

b) $\mathbb{Z}_3 \otimes_{\mathbb{Z}_9} \mathbb{Z}_9$

c) $\mathbb{Z}_3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

A zárójeles sorszámok a www.math.bme.hu/~lukacs/bboard/alg2/2018_feladatsoraira vonatkoznak, és ezen a címen az adott feladatok megoldását is meg lehet nézni.