## 1st test exercises

1) A homotopy from $f_0 g_0$ to $f_1 g_1$ keeping the endpoints of the paths $f_0 g_0$ and $f_1 g_1$ fixed can "filled in" by a homotopy of $g_0$ to $g_1$ to get a continuous map of a disk with boundary circle the two paths $f_0$ and $f_1$.
2) By a homotopy $H(\theta, s, t) = (\theta + 2\pi st, s)$ for $0 \leq t \leq 1$ we get a homotopy between

$$(\theta, s) \mapsto (\theta, s)$$
$$(\theta, s) \mapsto (\theta + 2\pi s, s).$$

   If a homotopy exists fixing the boundaries, then a loop going around once would be homotopic to the constant loop.
3) The charts $x^3$ and $id$ are appropriate.
4) In a second countable space $N$ at most countable components of $N \cap U$ are contained because each of them contains a basis set of a countable basis for the space $N$.
5) If a matrix has rank $\geq k$, then a small perturbation of its elements results a matrix with the same property because being $\neq 0$ is an open condition.

## 2nd test exercises

1) If $\alpha, \beta$ is a coordinate chart, then the volume form on it is

$$\sqrt{\det [Gram]} d\alpha \wedge d\beta.$$

2) For $\alpha = x^2 y^2 dx + y dy + xz dz$

$$d\alpha = 2yx^2 dy \wedge dx + z dx \wedge dz$$

   so $\alpha \neq d\beta$ because $dd\beta = d\alpha = 0$ doesn't hold.
3) In spherical coordinates it is easy to compute.
4) If $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ are dependent, then $\alpha_i$ is a combination of the others hence their wedge product is $0$. If they are independent, then taking their dual vectors and replacing them into the 1-forms in the formula $\ldots \sum \ldots$ for wedge product we get a non-zero value.

**Exercises**

(1) Compute the volume element of a torus with different parametrizations.
(2) Compute the volume element of the sphere with different parametrizations.
(3) Compute the volume element of the ellipsoid with different parametrizations.
(4) Integrate the distance from a plane on a sphere, ellipsoid, torus.
(5) Compute $d\alpha$ if $\alpha$ is equal to
   (a) $xydx + x^2zdy + yz^3dz\,,$
   (b) $xy^2dx + x^2yzdy + 2xyz^3dz\,,$
   (c) $2x^3z^2dx + x^2ydy + 2xz^3dz\,,$
   (d) $x^2ydx \wedge dy + 4yz^2dy \wedge dz + xyzdx \wedge dz\,,$
   (e) $2x^3z^2v^2dx \wedge dv + x^2ydy \wedge dx + 2xz^3dz \wedge dv\,,$
   (f) $x^2yvdx \wedge dy \wedge dv + 4yz^2v^2dy \wedge dz \wedge dv + xyzdx \wedge dz \wedge dy\,.$
(6) Is there any $\beta$ such that $d\beta = \alpha$ in the previous exercise?
(7) Compute $\int_M \omega$ if $M$ is the straight line segment connecting $(1, 2)$ and $(-3, -3)$ and $\omega$ is the form $xydx + x^2zdy + yz^3dz\,.$
(8) Compute $\int_M \omega$ for all the 1-forms in exercise (5).

## Sokaságok

**1.** Adjunk példát olyan topologikus terekre, melyek mutatják, hogy a topologikus sokaság definíciójában a T2-, illetve M2-tulajdonságok kikötése nem elhagyható. (*) És ha föltesszük, hogy a tér összefüggő?

**2.** Igazoljuk, hogy ha az $M$ topologikus sokaság összefüggő, akkor útösszefüggő is. Általában viszont az összefüggő komponensei nyílt részhalmazok és maguk is sokaságok.

**3.** Melyek a 0-dimenziós sokaságok?

**4.** Mutassuk meg, hogy az összefüggő 1-dimenziós sokaságok az $\mathbb{R}$ és az $S^1$ (homeomorfizmus erejéig). Mi a helyzet, ha nem összefüggőket is megengedünk?

**5.** Lássuk be, hogy véges sok topologikus sokaság szorzata is az.

**6.** Adjuk meg egy $i\colon S^{n_1} \times S^{n_2} \times \cdots \times S^{n_k} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_k+1}$ beágyazást.

**7.** Ekvivalenciareláció-e a térképek $C^\infty$-kompatibilitása?

**8.** Adjunk meg kontinuum sok páronként nem kompatibilis, globális térképet $\mathbb{R}$-en.

**9.** Adjunk meg differenciálható atlaszt

a) az $S^2$ gömbfelületen,

b) az $S^1 \times S^1$ tóruszon,

c) az $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/(x \sim \lambda x)$ projektív téren.

**10.** Legyen $M$ és $M'$ két differenciálható sokaság ugyanazon az alaphalmazon. Lássuk be, hogy $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(M')$ pontosan akkor, ha a differenciálható struktúrák megegyeznek. (Itt $\mathcal{F}(X)$ a differenciálható $X \to \mathbb{R}$ leképezések algebráját jelöli.)

**11.** A fönti jelöléseket használva lehetséges-e, hogy $\mathcal{F}(M) \supsetneq \mathcal{F}(M')$?

**Beadható:**

Legyenek $0 \le k \le n$ egészek, az $\mathbb{R}^n$ vektortér kanonikus bázisa $\{e_i \mid i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$,

$$G(n,k) = \{V \le \mathbb{R}^n \mid \dim V = k\},$$

az $\mathbb{R}^n$ vektortér $k$-dimenziós altereinek halmaza, és minden $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $|I| = k$ indexhalmazra $U_I \subseteq G(n,k)$ elemei azon alterek, melyek merőleges vetülete a $\langle \mathbf{e}_i \mid i \in I\rangle \le \mathbb{R}^n$ altérre izomorfizmus. A komplementer $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus I$ indexhalmazt jelölje $I'$.

Tekintsük azon $\varphi_I\colon U_I \to \mathbb{R}^{k\times(n-k)}$ függvényt, mely egy $V \in U_I$ altérhez azt a $k \times (n-k)$-as mátrixot rendeli, mely által meghatározott $\langle \mathbf{e}_i\rangle_{i\in I} \to \langle \mathbf{e}_i\rangle_{i\in I'}$ lineáris leképezés grafikonja $V$. A $G(n,k)$ halmaz topológiáját úgy definiáljuk, hogy minden $I$-re $U_I$ nyílt, és $\varphi_I$ homeomorfizmus.

a) Ellenőrizzük, hogy a topológia ezen definíciója rendben van, és az $(U_I, \varphi_I)$ párok egy differenciálható atlaszt alkotnak. (Az így kapott sokaságot *Grassmann-sokaságnak* hívjuk.)

b) Mutassuk meg, hogy $G(n,k)$ és $G(n,n-k)$ diffeomorfak.

c) Minek felel meg a $k = 1$ eset?

## Riemann-terek

Az $\mathbb{R}^m$ euklideszi tér természetes bázisának az $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_m = (0, \ldots, 0, 1)$ vektorokból álló bázist mondjuk. Legyen $M$ egy összefüggő nyílt halmaz $\mathbb{R}^m$-ben. Vegyünk egy $p \in M$ pontot. Az $M$ tér $p$ pontbeli érintőterén a $T_pM = \{(p, v) \mid v \in \mathbb{R}^m\}$ halmazt értjük, melyen természetes módon adódik egy vektortér-struktúra. A $p$-beli érintőtérnek egy természetes bázisát adják a $(p, e_1), \ldots, (p, e_m)$ vektorok. Ha $v = (v_1, \ldots, v_m)$, akkor $(p, v) = \sum_{i=1}^m v_i \cdot (p, e_i)$ teljesül.

Vegyünk egy $f : M \to \mathbb{R}$ függvényt, amely $C^\infty$-osztályú. A $(p, v)$ érintővektornak az $f$ függvényen nyert értéke a $p$-beli $v$ irányú derivált, vagyis

$$(p, v)(f) = D_v f(p) = \sum_{i=1}^m v_i \cdot \partial_i f(p).$$

Az $M$ térbeli sima görbén egy $C^\infty$-osztályú $\sigma : I \to M \subset \mathbb{R}^m$ leképezést értünk. A görbe $t \in I$ helyen vett érintővektora $\sigma^\vee(t) = (\sigma(t), \sigma'(t))$, amely a $\sigma(t)$ pontbeli $T_{\sigma(t)}M$ érintőtérnek az eleme.

Legyenek adva a $g_{ij} : M \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ $C^\infty$-osztályú függvények, melyekre $g_{ij} = g_{ji}$, és tetszőleges $p \in M$ pontban a $g_{ij}(p)$ értékekből képzett $G(p)$ szimmetrikus mátrix pozitív definit.

Tekintsük a $C^\infty$-osztályú $G : M \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$ leképezést az $m \times m$-es valós mátrixok $\mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$ terébe. Ezen $G$ függvényről azt mondjuk, hogy egy Riemann-metrikát ad az $M$ téren. A $g_{ij}$ valós függvényeket a Riemann-metrika komponensfüggvényeinek nevezzük.

**Definíció:** A fönti tulajdonságú $(M, G)$ párt egy $m$-dimenziós *Riemann-térnek* mondjuk.

A továbbiakban a $p$ pontbeli $(p, v)$ érintővektorra a $v_p$ jelölést is alkalmazzuk. A $G$ Riemann-metrika a $T_pM$ $(p \in M)$ érintőtéren meghatároz egy $\langle \bullet, \bullet \rangle_G : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ skaláris szorzatot, melynél a $(p, v) = v_p$ és $(p, w) = w_p$ vektorok skaláris szorzata $\langle v_p, w_p \rangle_G = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m g_{ij}(p) \cdot v_i \cdot w_j$. A $p$ pontbeli $v_p$ érintővektor hossza (normája) a $\|v_p\| = \sqrt{\langle v_p, v_p \rangle_G}$ nemnegatív érték.

**Definíció:** Az $(M, G)$ Riemann-térbeli $\sigma : [a, b] \to M$ sima görbe *ívhosszán* az $\ell(\sigma) = \int_a^b \|\sigma^\vee(t)\| \, dt$ számot értjük.

Ha a $\sigma$ görbe a végpontjait összekötő görbék között a legrövidebb, akkor a $\sigma$-t az $(M, G)$ Riemann-tér egy *pregeodetikus görbéjének* mondjuk.

Az $(M, G)$ Riemann-térben valamely $p, q$ pontok $d_G(p, q)$ *távolságán* a két pontot összekötő szakaszonként sima görbék ívhosszainak az infimumát értjük.

Ha $B$ egy Jordan-mérhető zárt tartomány $M$-ben akkor a

$$\mathrm{Vol}(B) = \int_B \sqrt{\det G(u_1, \ldots, u_m)} \, du_1 \ldots du_m$$

számot mondjuk a $B$ *térfogatának.*

Amennyiben $N$ egy nyílt összefüggő halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, akkor definiálható egy $\mu : M \to N$ sima leképezés és annak az érintőleképezései az $M$ pontjaiban. A $\sigma$ görbe $\sigma^\vee(t)$ érintővektorának a $T\mu$ érintőleképezés szerinti képe a $(\mu \circ \sigma)^\vee(t) = \big(\mu(\sigma(t)), (\mu \circ \sigma)'(t)\big)$ vektor. Ha vesszük a $p$ pontbeli $T_p\mu : T_pM \to T_{\mu(p)}N$ érintőleképezést, akkor annak a természetes bázisokra vonatkozó mátrixa éppen a $J\mu(p)$ Jacobi-mátrix.

Legyen $\tilde{M}$ egy másik nyílt összefüggő halmaz $\mathbb{R}^m$-ben, amelyen szintén adva van egy $\tilde{G}$ Riemann-metrika.

**Definíció:** A $\mu : M \to \tilde{M}$ sima leképezést *izometriának* mondjuk az $(M, G)$ és az $(\tilde{M}, \tilde{G})$ Riemann-terek között, ha $\mu$ bijektív, és tetszőleges $v_p, \ w_p \in T_pM$ érintővektorokra

$$\langle v_p, w_p \rangle_G = \langle T\mu(v_p), T\mu(w_p) \rangle_{\tilde{G}}.$$

**12**. Legyenek adva az $(M, G)$ és $(\tilde{M}, \tilde{G})$ $m$-dimenziós Riemmann-terek, ahol $M$ és $\tilde{M}$ összefüggő nyílt halmazok $\mathbb{R}^m$. Tegyük fel, hogy megadható egy $\mu\colon M \to \tilde{M}$ sima bijekció. Igazoljuk, hogy a $\mu$ leképezés pontosan akkor izometria, ha tetszőleges $p \in M$ pontban teljesül a $G(p) = (J\mu(p))^{\mathsf{T}} \cdot \tilde{G}(\mu(p)) \cdot J\mu(p)$ mátrixegyenlet.

**13**. Tekintsük azt a 2-dimenziós $(M, G)$ Riemann-teret, ahol $M = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0\}$ és a $G$ metrika komponensfüggvényei $g_{11}(u, v) = v^{-2}$, $g_{12}(u, v) = 0$, $g_{22}(u, v) = v^{-2}$. Az $\mathbb{R}^2$ síkban tekintsük a $v = 0$ egyenletű pontjai körül 1 sugarú körökre vonatkozó inverziókat.

a) Bizonyítsuk be, hogy amennyiben az inverzióknak az $M$-re való leszűkítéseit vesszük, akkor ezen leképezések izometriái az $(M, G)$ Riemann-térnek.

b) Adjunk példát további izometriákra.

**14**. Tekintsük az előző feladatban szereplő Riemann-teret. Vegyük az $M$-beli $p_1 = (a, b)$ és $p_2 = (a, c)$ pontokat, ahol $c > b > 0$. Igazoljuk, hogy a $p_1, p_2$ pontokat összekötő legrövidebb sima görbe pályája megegyezik a két pontot összekötő $\mathbb{R}^2$-beli szakasszal, és fejezzük ki annak ívhosszát a $p_1, p_2, q = (a, 0)$ kollineáris ponthármas euklideszi értelemben vett osztóviszonyával.

**15**. Tekintsük az 1. feladatban leírt $(M, G)$ Riemann-teret. Legyenek $p_1 = (a_1, b_1)$ és $p_2 = (a_2, b_2)$ olyan pontok $M$-ben, hogy $a_1 \neq a_2$. Vegyük azt a kört az $\mathbb{R}^2$ síkban, amely áthalad a $p_1$, $p_2$ pontokon és centruma a $v = 0$ egyenletű egyenesen van. Ez a kör metssze a $v = 0$ egyenletű egyenest a $q_1 = (c_1, 0)$, $q_2 = (c_2, 0)$ pontokban. Igazoljuk, hogy az $(M, G)$ Riemann-térben a $p_1$, $p_2$ pontokat összekötő legrövidebb görbe ívhossza $|\log(p_1\, p_2\, q_1\, q_2)|$, ahol $(p_1\, p_2\, q_1\, q_2)$ a köri pontnégyes kettősviszonya. (A feladat alapján a két pont távolságára fönnáll $d_G(p_1, p_2) = |\log(p_1\, p_2\, q_1\, q_2)|$.)

**16**. Tekintsük azt az $(M, G)$ Riemann-teret, ahol $M = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 2\}$ és a $G$ metrika komponensfüggvényei $g_{11}(u, v) = (v - 2)^{-2}$, $g_{12}(u, v) = 0$, $g_{22}(u, v) = (v - 2)^{-2}$. Vegyük továbbá $\mathbb{R}^2$-ben az $N = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + (v - 1)^2 < 1\}$ teret. Legyen a $\mu\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezés az $u^2 + v^2 = 4$ egyenletű körre vonatkozó inverzió, amely egymásba képezi az $\mathbb{R}^2$-beli $M$ és $N$ tartományokat. Írjuk le az $N$ téren azt a $\tilde{G}$ Riemann-metrikát, amelyre nézve $\mu$ egy izometriát ad az $(M, G)$ és $(N, \tilde{G})$ Riemann-terek között.

**17**. Vegyük az $M = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ 2-dimenziós Riemann-teret, amelynél a metrikát a $g_{11}(u, v) = g_{22}(u, v) = (1 - u^2 - v^2)^{-2}$, $g_{12}(u, v) = 0$ függvények adják meg. Igazoljuk, hogy a $q = (0, 0)$ pontot a $p = (a, 0)$ $(0 < a < 1)$ ponttal összekötő legrövidebb görbe ívhossza $d_G(q, p) = \operatorname{arth}(a) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + a}{1 - a}\right)$, továbbá számítsuk ki a $B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < a^2\}$ körlemez területét az $(M, G)$ Riemann-térben.

**Jelölés:** Az $M$ sima sokaságon vett sima $M \to \mathbb{R}$ függvények halmaza $\mathcal{F}(M)$, a vektormezőké $\mathfrak{X}(M)$.

**Definíció:** Az $n$-dimenziós $M$ sima sokaság *parallelizálható*, ha léteznek $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők, hogy minden $p \in M$-re $X_1(p), \ldots, X_n(p)$ bázisa a $T_pM$ érintőtérnek.

**1**. Legyen $M$ sokaság és $p \in M$. Igazoljuk, hogy a $T_pM$ érintőtér alábbi két alternatív definíciója ekvivalens az előadáson elhangzottal:

(1) Tekintsük azon $\gamma\colon I \to M$ görbéket, melyekre $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt, $0 \in I$, és $\gamma(0) = p$. Az ilyen $\gamma, \eta$ görbéket ekvivalensnek tekintjük, ha valamely (és így bármely) $p$ körüli $\varphi$ térképre $(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \eta)'(0)$. Az így kapott ekvivalenciaosztályok a $p$-beli érintővektorok.

(2) Jelölje $\mathcal{A}_p$ a $p$ körüli térképek halmazát. Ekkor $p$-beli érintővektoron egy $v\colon \mathcal{A}_p \to \mathbb{R}^n$ leképezést értünk, mely bármely $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_p$ térképre teljesíti a $v(\psi) = (\psi \circ \varphi^{-1})'(p) \cdot v(\varphi)$ egyenlőséget.

**2**. Legyenek $M$ és $M'$ sima sokaságok, $p \in M$, és $p' \in M'$. Adjunk meg egy természetes azonosítást a $T_{(p,p')}(M \times M')$ érintőtér és a $T_pM \times T_{p'}M'$ direkt szorzat között.

**3**. Legyen adott egy olyan $\mu\colon M \to N$ sima leképezés az összefüggő $M$ sokaságból az $N$ sokaságba, hogy annak bármely $p \in M$ pontbeli érintőleképezésére fennáll $T_p\mu = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $\mu$ leképezés konstans.

**4**. Legyen $\mu\colon M \to \mathbb{R}^m$ sima leképezés, ahol $M$ egy $m$-dimenziós kompakt sokaság. Mutassuk meg, hogy van olyan $p \in M$, melyre $\mathrm{rk}(T_p\mu) < m$.

**5**. Tegyük föl, hogy létezik $M \to N$ sima beágyazás az $M$ és $N$ sima sokaságok között. Igazoljuk, hogy ekkor $\dim M \leq \dim N$.

**6**. Határozzuk meg az integrálgörbéket az alábbi vektormezők esetében:

a) $\mathbb{R}$-en $X = u^2 \dfrac{\partial}{\partial u}$

b) $\mathbb{R}^2$-en $X = u \dfrac{\partial}{\partial u} - v \dfrac{\partial}{\partial v}$

**7**. Legyen $M$ sima sokaság, rajta $X$ sima vektormező, és ennek egy integrálgörbéje $\gamma$. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely $t$-re $\gamma'(t) = 0$, akkor $\gamma$ konstans.

**8**. Ellenőrizzük, hogy

a) $\mathbb{R}^n$ parallelizálható;

b) parallelizálható sokaság nyílt részsokasága is az;

c) parallelizálható sokaságok szorzata is az.

**9**. Az alábbi sokaságok közül melyek lesznek parallelizálhatók?

a) $S^1$

b) $S^2$

c) $T^2 = S^1 \times S^1$

d) $S^3$

**10**. Igazoljuk, hogy $\mathfrak{X}(M)$ mint $\mathcal{F}(M)$-modulus pontosan akkor szabad, ha $M$ parallelizálható.

**Definíció:** Legyenek $M, N$ sima sokaságok és $\mu\colon M \to N$ sima leképezés. Azt mondjuk, hogy $X \in \mathfrak{X}(M)$ és $Y \in \mathfrak{X}(N)$ *$\mu$-kapcsolt vektormezők*, ha minden $p \in M$ pontban $Y_{\mu(p)} = T_p\mu(X_p)$.

**Jelölés:** Az $n \times n$-es valós mátrixok $M_n(\mathbb{R})$ tere az $[A, B] = AB - BA$ kétváltozós művelettel egy Lie-algebrát ad, melyet jelöljön $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Ennek részalgebrája $\mathfrak{so}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid A^\mathsf{T} = -A\}$.

**1**. Tekintsük az $M$ sima sokaság pontjaiban vett érintőterek $TM = \cup_{p\in M} T_pM$ unióját. Legyen $\pi\colon TM \to M$ az a leképezés, ahol bármely $v \in T_pM$ vektorra $\pi(v) = p$.

Vegyük egy $(U, \xi)$ térképét az $M$-nek. A $\xi$-hez rendeljük hozzá a

$$\bar{\xi}\colon TU \to \mathbb{R}^{2m}, \quad \bar{\xi}(w) = (x^1 \circ \pi(w), \ldots, x^m \circ \pi(w), w(x^1), \ldots, w(x^m)).$$

injektív leképezést. Bizonyítsuk be, hogy ezek mint térképek egy $C^\infty$-atlaszt adnak meg $TM$-en.

**2**. Az $\mathbb{R}^2$ euklideszi síkon vegyük az $Y = 4u^2\dfrac{\partial}{\partial u^1} - u^1\dfrac{\partial}{\partial u^2}$ sima vektormezőt. Írjuk le az $Y$ mező integrálgörbéit (és az $Y$ mező által generált folyamot).

**3**. Legyen $M$ sima sokaság, $X \in \mathfrak{X}(M)$, és $\varphi^t$ a hozzá tartozó folyam. Igazoljuk, hogy tetszőleges $f \in \mathcal{F}(M)$ függvényre és $p \in M$ pontra

$$(Xf)(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\varphi^t(p)) - f(p)}{t}.$$

**4**. Legyen $\mu\colon M \to N$ sima leképezés. Mutassuk meg, hogy $X \in \mathfrak{X}(M)$ és $Y \in \mathfrak{X}(N)$ pontosan akkor $\mu$-kapcsolt, ha minden $f \in \mathcal{F}(N)$-re $X(f \circ \mu) = (Yf) \circ \mu$.

**5**. Legyen $M$ sima sokaság és $\varphi^t$ egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőhöz tartozó folyam. Lássuk be, hogy minden $t$ esetén $X$ önmagával $\varphi^t$-kapcsolt.

**6**. Rögzítsünk egy $D \in M_n(\mathbb{R})$ invertálható mátrixot. Igazoljuk, hogy a

$$\mathbf{g}_D = \left\{X \in M_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; X^\mathsf{T}D + DX = 0\right\}$$

lineáris altér egy rész-Lie-algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$-ben.

**7**. Lássuk be, hogy $\mathfrak{so}(3)$ izomorf az $(\mathbb{R}^3, \times)$ Lie-algebrával.

**8**. Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér egy $Y$ vektormezőjét *lineárisnak* nevezzük, ha van olyan $n \times n$-es $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ mátrix, amelyre

$$Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}u^i \frac{\partial}{\partial u^j}.$$

Bizonyítsuk be, hogy a lineáris vektormezők az $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ Lie-algebrában egy részalgebrát alkotnak, mely izomorf $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$-rel.

**9**. Legyen $M_n(\mathbb{R})$ az $n \times n$-es valós mátrixok tere, és vegyük az

$$\exp\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), \quad \exp(A) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}A^n$$

exponenciális leképezést. Bizonyítsuk be, hogy $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{tr}(A)}$, ahol $\mathrm{tr}(A)$ az $A$ mátrix nyomát jelöli.

**10**. Tekintsük az invertálható $n \times n$-es mátrixok $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ csoportjában a

$$G_D = \left\{ A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \;\middle|\; A^\mathsf{T} D A = D \right\}$$

részcsoportot. Mutassuk meg, hogy a 6. feladat jelölésével $\exp(\mathbf{g}_D) \subset G_D$.

**Beadható:**

Lássuk be, hogy tetszőleges $M$ összefüggő sima sokaságra és $p, q \in M$ pontokra létezik $f\colon M \to M$ diffeomorfizmus, melyre $f(p) = q$.

**1**. Igazoljuk, hogy az alábbi ponthalmazok részsokaságokat alkotnak:

a) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2+z^2-w^2=2, xyzw=4\} \subset \mathbb{R}^4$,

b) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2-zw=4\} \subset \mathbb{R}^4$.

**2**. Milyen típusú tenzormezőket adnak az alábbi műveletek (vektormezőkön pontonként végrehajtva)?

a) $\mathbb{R}^n$-ben két vektor skaláris szorzata

b) $\mathbb{R}^3$-ben két vektor vektoriális szorzata

c) $\mathbb{R}^3$-ben két vektor vegyes szorzata

d) $\mathbb{R}^n$-ben egy rögzített függvénynek valamely vektor irányában vett deriváltja

**3**. Tenzormezőt definiálnak-e az alábbi leképezések?

a) $\mathbb{R}^n$-en $(X,Y) \mapsto \sum_i \eta^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, ahol $Y = \sum_i \eta^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$

b) $M$ sima sokaságon $Y \mapsto [X,Y]$, ahol $X \in \mathfrak{X}(M)$ rögzített

**4**. Legyen $M$ sima sokaság.

a) Igaz-e, hogy az $M$-en megadható lineáris konnexiók $\mathbb{R}$ fölötti vektorteret alkotnak (a természetes műveletekkel)?

b) Lássuk be, hogy a konnexiók affin alteret alkotnak az $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ függvények vektorterében.

**5**. Az $\mathbb{R}^m$ téren vegyük a természetes konnexiót. Mutassuk meg, hogy ha $X$ és $Y$ lineáris vektormezők, akkor $\nabla_X Y$ is az.

**6**. Legyen $\nabla$ a természetes konnexió $\mathbb{R}^m$-en. Adjuk meg azon $Y$ sima vektormezőket, melyekre $\nabla_X Y = X$ tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$ esetén.

**7**. Legyen $M$ sima sokaság, és rajta $\nabla$ lineáris konnexió. Tekintsük az

$$R\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \quad R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z$$

leképezést. (Ezt nevezzük a $\nabla$ *görbületi tenzorának*.)

a) Igazoljuk, hogy ez egy $(1,3)$ típusú tenzormezőt ad.

b) Lássuk be, hogy ha $\nabla$ torziómentes, azaz $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$, akkor

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

**8**. Az $S^3$ gömbön meg lehet-e adni olyan $\nabla$ lineáris konnexiót, melynek az $R$ görbületi tenzora eltűnik?

**9**. Legyen $(M,\nabla)$ sima sokaság és tekintsük egy $Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőre a

$$\nabla Y\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \quad (\nabla Y)(X) = \nabla_X Y$$

tenzormezőt. Az $Y$ *divergenciáján* a $\operatorname{div} Y \in \mathcal{F}(M)$, $(\operatorname{div} Y)(p) = \operatorname{tr}(\nabla Y)_p$ függvényt értjük.

Igazoljuk, hogy fönnáll $\operatorname{div}(fY) = Yf + f \operatorname{div} Y$, ahol $f \in \mathcal{F}(M)$.

**10**. Az $\mathbb{R}^2$ euklideszi síknak vegyük az $U = \{(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_2 > 0\}$ nyílt részhalmazát. Tekintsük a polárkoordináták adta $\xi\colon U \to \mathbb{R}^2$ térképet, azaz $\xi = (x^1, x^2)$, ahol

$$x^1(a_1,a_2) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{és} \quad x^2(a_1,a_2) = \operatorname{arcctg}(a_1/a_2).$$

Adjuk meg az $\mathbb{R}^2$-beli természetes kovariáns deriválás $(U,\xi)$ térképre vonatkozó Christoffel-szimbólumait.

**1**. Lássuk be, hogy $\mathbb{R}^n$-et a természetes konnexióval ellátva a görbe menti párhuzamos eltolás megyegyezik az euklideszi geometriabeli eltolással (az érintőtereket természetes módon azonosítva $\mathbb{R}^n$-nel).

**2**. Adott $(M, \nabla)$ mellett egy $f \in \mathcal{F}(M)$ függvényhez rendeljük a $H_f = \nabla(df)$ $(0, 2)$-típusú tenzormezőt. Igazoljuk, hogy ha $\nabla$ torziómentes (lásd 5/7-es feladat), akkor $H_f(X, Y) = H_f(Y, X)$.

**3**. Legyen $(M, g)$ Riemann-sokaság. Az $f \in \mathcal{F}(M)$ függvény *gradiensén* azt a $\operatorname{grad} f \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők értjük, melyre

$$\forall Y \in \mathfrak{X}(M) : df(Y) = g(\operatorname{grad} f, Y).$$

Lássuk be, hogy ha $\sigma\colon [a, b] \to M$ egy nem konstans integrálgörbéje $\operatorname{grad} f$-nek, akkor $\sigma$ nem lehet zárt.

**4**. Egy $M$ sokaságon a $\langle\cdot, \cdot\rangle)$ Riemann-metrika *Laplace-operátora* a

$$\Delta\colon \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M), \quad \Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

leképezés (a divergencia definícióját lásd az 5/9-es feladatban). Igazoljuk, hogy minden $f, h \in \mathcal{F}(M)$ mellett

$$\Delta(fh) = f \cdot \Delta h + h \cdot \Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h\rangle.$$

**5**. Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $u^1, \ldots, u^n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a koordinátafüggvények, és $r\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ sima beágyazás $\mathbb{R}^{n+1}$-be. A standard Riemann-metrika $\mathbb{R}^{n+1}$-en legyen $\tilde{g}$, ennek visszahúzása $U$-ra $g = r^*\tilde{g}$. Igazoljuk, hogy

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \cdot du^i \otimes du^j,$$

ahol $g_{ij}$ az $r$ paraméterezéshez tartozó első főmennyiségek.

**6**. Tekintsük $\mathbb{R}^2$-en a standard Riemann-metrika mellett az $f(x, y) = 4xy - y^2$ függvényt. Legyen

$$Y = \frac{1}{2} \operatorname{grad} f \quad \text{és} \quad Z = (8u^2 + 2u^2)\frac{\partial}{\partial u^1} + (-2u^1 + 7u^2)\frac{\partial}{\partial u^2}.$$

Mely $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ vektormezőre áll fönn $\nabla_X Y = Z$?

**Beadható:**

Tekintsük az alább megadott két $(M, g)$ és $(D, \tilde{g})$ Riemann-sokaságokat:

$$\begin{aligned}
M &= \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1,\ x_{n+1} > 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1},\\
g &= dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n - dx_{n+1} \otimes dx_{n+1},\\
D &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| < 1\} \subseteq \mathbb{R}^n,\\
\tilde{g} &= 4\Big(\sum_{i=1}^{n} dx_i \otimes dx_i\Big)/(1 - \|\mathbf{x}\|^2)^2.
\end{aligned}$$

Ellenőrizzük, hogy ezek tényleg Riemann-metrikát adnak meg $M$-en, illetve $D$-n, továbbá mutassuk izometriát a kettő között.

**1**. Legyen $\nabla$ konnexió az $M$ sima sokaságon, és $\sigma\colon I \to M$ sima görbe, ahol $I$ nyílt intervallum. Legyen továbbá $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \varphi\colon J \to M$ a $\sigma$ egy átparaméterezése, ahol a $\varphi\colon J \to I$ függvényre mindenhol $\varphi' \neq 0$. Igazoljuk, hogy egy $\sigma$-menti vektormező pontosan akkor párhuzamos, ha $\tilde{\sigma}$-mentiként tekintve is az.

**2**. Legyen $M$ sima sokaság, $\nabla$ ezen lineáris konnexió és $p \in M$ egy adott pont. Egy $\sigma\colon [a,b] \to M$ görbére legyen $\mathcal{P}_\sigma$ a $\sigma$-menti $T_{\sigma(a)}M \to T_{\sigma(b)}M$ párhuzamos eltolás. Ellenőrizzük, hogy

$$\mathcal{H}_p(M,\nabla) = \{\mathcal{P}_\sigma \mid \sigma\colon [a,b] \to M,\ \sigma(a) = \sigma(b) = p\} \subseteq \mathrm{GL}(T_pM)$$

egy részcsoport (ez a konnexió $p$-beli *holonómia csoportja*). Mutassuk meg, hogy ez a csoport $M$ egy összefüggőségi komponensén belül $p$ választásától független.

**3**. Az $(M,g)$ Riemann-sokaságon tekintsünk egy pozitív $f \in \mathcal{F}(M)$ függvényt. Ekkor $\tilde{g} = f^2 g$ is Riemann-metrika. A két metrikához tartozó Levi–Civita-konnexió legyen $\nabla$ és $\tilde{\nabla}$. Fejezzük ki a $\nabla - \tilde{\nabla}$ tenzormezőt $f$ és $g$ segítségével.

**4**. Igaz-e, hogy tetszőleges $\alpha \in \mathcal{A}^k(V)$ alternáló formára $\alpha \wedge \alpha = 0$?

**5**. Az $\mathbb{R}^3$ vektortérben a kanonikus bázis duálisa legyen $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$. A $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorra fejezzük ki az

$$\omega_{\mathbf{v}} \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^3), \quad \omega_{\mathbf{v}}(\mathbf{w},\mathbf{u}) = \langle \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$$

alternáló formát az $\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j$ formák segítségével.

**6**. A $V$ valós vektortéren adott egy $\langle,\rangle$ (pozitív definit) skaláris szorzás. Az $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázisra és az ehhez tartozó $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ duális bázisra tekintsük a $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n = \big(\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle\big)_{i,j=1}^n$ Gram-mátrixot és a

$$\nu = \sqrt{\det G} \cdot \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n$$

térfogati formát. Lássuk be, hogy $|\nu|$ független az $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázis választásától.