Algebra 2, Galois-elmélet feladatsor, 2018

1. (1/3) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q}[x]/(x^2-2) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2-2x-1)$.

2. (1/4) Adjuk meg $\cos 20^\circ$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ fölött.

3. (1/5) Adjuk meg $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ fölött!

4. (1/6) Legyen α az $x^3-2x^2+x+1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom egyik gyöke. Adjuk meg α^2+2 reciprokát α legföljebb másodfokú polinomjaként!

5. (2/1) Hányadfokú a $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, illetve az $\mathbb{Q}(i+\sqrt{3})$ bővítés $\mathbb{Q}$ fölött?

6. (2/2) Számítsuk ki a következő testbővítések fokait $\mathbb{Q}$ fölött!
a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$ d) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}+\sqrt{2})$

7. (2/3) Hányadfokú az F/K bővítés, ha F az f felbontási teste, és
a) $K=\mathbb{Q}$, $f=x^6-1$ b) $K=\mathbb{Q}$, $f=x^6-2$
c) $K=\mathbb{F}_7$, $f=x^6-1$ d) $K=\mathbb{F}_5$, $f=x^6-2$

8. (2/4) Legyen α az x^3+x+1 polinom egyik gyöke $\mathbb{F}_2$ fölött, és legyen $K=\mathbb{F}_2(\alpha)$. Irreducibilis-e az $x^2+x+\alpha$ polinom K fölött?

9. a) Hány részteste van a p^n elemű testnek, ahol p prím, és n kanonikus alakja $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$? Hány eleműek a résztestek?
b) Tegyük föl, hogy K_1 és K_2 résztestek egy K testben, továbbá $|K_1|=64$, $|K_2|=256$. Hány eleme lesz a K_1 és K_2 által generált résztestnek K-ban?

10. Ha $\alpha+\beta$ algebrai, $\alpha\beta$ pedig transzcendens szám, mit mondhatunk α-ról és β-ról? És ha $\alpha\beta$ algebrai, és $\alpha+\beta$ transzcendens?

11. (2/7) Tegyük fel, hogy $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$ olyanok, hogy $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ és $\alpha+\beta+\gamma$ is algebrai számok $\mathbb{Q}$ fölött. Bizonyítsuk be, hogy α, β és γ is algebraiak.

12. (3/1)Legyen α az x^3-2 polinom egyik nem valós gyöke. Határozzuk meg α fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ fölött, és határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\alpha)\cap\mathbb{R}$ résztestet! Igaz-e, hogy ha $K \le L \le M$, és $\alpha \in M$, akkor α L fölötti foka osztója α K fölötti fokának?

13. (3/2) Igaz-e, hogy normális bővítés normális bővítése normális az eredeti test fölött?

14. (3/4) Hányadfokú x^4-x^2+1 felbontási teste $\mathbb{Q}$ fölött, illetve $\mathbb{F}_p$ fölött, ha p prím?

15. (3/5) Igaz-e, hogy egy $K=\mathbb{F}_p(\alpha)$ ($\alpha \notin \mathbb{F}_p$) testben α szükségképpen generátoreleme a K multiplikatív csoportjának?

16. (4/1) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$ automorfizmuscsoportja egyelemű. (Útmutatás: Lássuk be, hogy $\mathbb{R}$ minden automorfizmusa rendezéstartó.)

17. (4/2) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$ nem áll elő egy valódi résztestének véges fokú normális bővítéseként.

18. (4/3) Határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \mid \mathbb{Q}$ bővítés Galois-csoportját.

19. (4/4) Határozzuk meg a következő polinomok Galois-csoportját $\mathbb{Q}$ fölött és $\mathbb{F}_3$ fölött

a) $x^4 - 3x^2 + 4$ b) $x^3 - 2$ c) $x^3 + 2x^2 + 2$

20. (4/5) Bizonyítsuk be, hogy ha egy harmadfokú, racionális együtthatós, irreducibilis polinomnak nem mindegyik gyöke valós, akkor a Galois-csoportja S_3-mal izomorf.

21. (4/6) Keressük meg az $f(x) = x^8 - 1$ polinom $\mathbb{Q}$ fölötti felbontási testének résztesteit!

22. (5/1) Keressünk olyan $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinomokat, melyeknek a Galois-csoportjai rendre:
a) C_3; b) C_2^n; c) S_3.

23. a) Mutassuk meg, hogy egy $60°$-os szöget nem lehet szerkesztéssel harmadolni.
b) Bizonyítsuk be, hogy nem lehet megszerkeszteni egy 2 térfogatú kocka élét.
c) (5/4) Melyik n egészekre szerkeszthető n fokos szög?

24. (5/9) Tudjuk, hogy $\mathbb{Q}(\cos 40°)$ Galois-csoportja 3-elemű. Van-e olyan racionális szám, amelynek a köbgyökével való bővítés ugyanezt a testet adja?

25. (5/11) Az alábbiak közül melyik polinomok gyökeit lehet az alapműveletek és gyökvonás segítségével felírni?
a) $x^4 + 2x^3 - 5x + 1$
b) $x^5 - 15x^4 + 6$
c) $x^6 - 2x^2 + 4$

A sorszámok a `www.math.bme.hu/lukacs/bboard/alg2/2018` *feladatsoraira vonatkoznak, és ezen a címen az adott feladatok megoldását is meg lehet nézni.*