# Mértékelmélet BSc záróvizsga feladatsor

## 1. Mérhető függvények, majdnem mindenütt konvergencia

(1) Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető tér, és $f, g : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ mérhető függvények. Mutassa meg, hogy az

$$\{\omega \in \Omega : \ f(\omega) \neq g(\omega)\}$$

halmaz mérhető.

(2) *a*) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő. Mutassa meg, hogy $f$ mérhető.

*b*) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható. Mutassa meg, hogy $f'$ mérhető.

(3) Legyen $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ egy mérhető tér, $f_n : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ mérhető függvény minden $n \in \mathbb{N}$-re, és $i : \mathcal{X} \to \mathbb{N}$.

*a*) Bizonyítsa be, hogy $i$ $\mathcal{A} - \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mérhető pontosan akkor, ha minden $n \in \mathbb{N}$-re $i^{-1}(\{n\}) \in \mathcal{A}$.

*b*) Bizonyítsa be, hogy ha $i$ $\mathcal{A} - \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mérhető, akkor az $x \mapsto f_{i(x)}(x)$ függvény mérhető.

(4) Legyen $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ teljes mértéktér, és $f_n, g_n : (\mathcal{X}, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ függvények sorozatai, melyekre

$$f_n = g_n \quad \mu - \text{majdnem mindenütt.}$$

Mutassa meg, hogy ha $f_n \to f$ és $g_n \to g$ $\mu$-majdnem mindenütt, akkor $f = g$ $\mu$-majdnem mindenütt.

(5) Legyen $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f_n : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ mérhető függvények minden $n \in \mathbb{N}$-re, és $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ mérhető függvény. Bizonyítsa be, hogy ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{|f_n - f| > 1/n\}) < +\infty,$$

akkor $f_n \to f$ $\mu$-mm.

## 2. Külső mértékek, kiterjesztés, speciális mértékek

(6) Legyen $\mathcal{X} = \{a, b, c\}$ egy háromelemű halmaz, és legyen $\beta : P(\mathcal{X}) \to [0, \infty]$ a következőféleképp definiálva:

$$\beta(\emptyset) := 0, \quad \beta(\mathcal{X}) := 2, \quad \text{és} \quad \beta(A) := 1 \quad \text{egyébként.}$$

Mutassa meg, hogy $\beta$ külső mérték, és határozza meg a $\beta$ szerinti mérhető részhalmazait $\mathcal{X}$-nek.

(7) Legyen $\beta$ külső mérték $\mathcal{X}$-en, és legyen $\beta(A) = 0$ valamely $A \subseteq \mathcal{X}$ halmazra. Mutassa meg, hogy $\beta(A \cup B) = \beta(B)$ minden $B \subseteq \mathcal{X}$ halmazra.

(8) Legyen $\beta$ egy külső mérték egy $\mathcal{X}$ halmazon, és $A \subseteq \mathcal{X}$ $\beta$-mérhető. Mutassa meg, hogy ha $B \subseteq \mathcal{X}$ olyan, hogy $A \subseteq B$, $\beta(A) = \beta(B)$, és $\beta(B) < \infty$, akkor $B$ is $\beta$-mérhető.

(9) Legyen $\mathcal{S} := \{A \subset \mathbb{R} : |A| < +\infty\}$ a valós számegyenes összes véges részhalmazának halmaza, és minden $A \in \mathcal{S}$-re legyen $\alpha(A) := 0$.

*a*) Mutassa meg, hogy $\mathcal{S}$ félgyűrű, amelyen $\alpha$ $\sigma$-véges, de nem teljesen $\sigma$-véges.

*b*) Határozza meg $\sigma(S)$-et.

*c*) Mutassa meg, hogy $\alpha$-nak végtelen sok különböző kiterjesztése van $\mathcal{S}$-ről $\sigma(S)$-re.

(10) *a*) Legyenek $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ és $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ mérhető terek, és $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ egy mérhető halmaz a szorzat $\sigma$-algebrára nézve. Mutassa meg, hogy $A$ minden metszete mérhető, azaz

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{X} : \quad & A_x := \{y \in \mathcal{Y} : (x, y) \in A\} \in \mathcal{B}, \\ \forall y \in \mathcal{Y} : \quad & A^y := \{x \in \mathcal{X} : (x, y) \in A\} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

*b*) Legyen $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ egy $\sigma$-véges mértéktér, és $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ egy mértéktér, amelyben létezik egy nullmértékű egyelemű halmaz, azaz egy $\{y\} \in \mathcal{B}$ amelyre $\nu(\{y\}) = 0$. Mutassa meg, hogy minden $A \subseteq \mathcal{X}$-re

$$(\mu \times \nu)^*(A \times \{y\}) = 0, \qquad \text{és így} \qquad A \times \{y\} \in \mathcal{M}((\mu \times \nu)^*).$$

Mutassa meg, hogy ha $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(\mathcal{X})$ akkor $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{M}((\mu \times \nu)^*)$, azaz

$$(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu) \otimes (\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu) \subsetneq (\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu) \overline{\otimes} (\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu).$$

(11) *a*) Definiálja a kétdimenziós eloszlásfüggvény fogalmát!

*b*) Az alábbi függvények közül melyek határoznak meg kétdimenziós eloszlásfüggvényt?

$$(i) \quad F_1(x, y) := \frac{1}{\pi^2}(\operatorname{arctg} 2x)(\operatorname{arctg} y) + \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} 2x + \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} y + \frac{1}{4},$$

$$(ii) \quad F_2(x, y) := \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(2x + y) + \frac{1}{2}.$$

*c*) Ha $F_i$ eloszlásfüggvény ($i = 1$ vagy $i = 2$ esetén), akkor adja meg az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1/2, 0 \leq y < 1\}$ halmaznak az $F_i$ által meghatározott Lebesgue-Stieltjes mérték szerinti mértékét!

# 3. Regularitás

(12) Legyen $\tau$ a diszkrét topológia egy $\mathcal{X}$ halmazon.

*a*) Mutassa meg, hogy minden $\mathcal{P}(\mathcal{X})$-en értelmezett mérték kívülről reguláris.

*b*) Minden $x \in \mathcal{X}$-re legyen $c_x \in \mathbb{R}_+$ egy nemnegatív szám, és legyen $\mu := \sum_{x\in\mathcal{X}} c_x\delta_x$. Mutassa meg, hogy $\mu$ belülről reguláris $\mathcal{P}(\mathcal{X})$-en.

(13) Legyen $\mathcal{X}$ egy halmaz, és $\gamma$ a számlálómérték $\mathcal{P}(\mathcal{X})$-en. Mutassa meg, hogy $\gamma$ pontosan akkor reguláris egy $\mathcal{X}$-en adott $\tau$ topológiára nézve, ha az a diszkrét topológia.

(14) *a*) Legyen $\tau_{hl} := \{(-\infty, c) : c \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathcal{X}\}$ a félegyenes-topológia $\mathbb{R}$-en. Határozza meg az összes $\tau_{hl}$-re nézve kompakt halmazt.

*b*) Mutassa meg, hogy a $\tau_{hl}$ által generált $\mathcal{B}(\tau_{hl})$ $\sigma$-algebra megegyezik az euklideszi topológia által generált $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\sigma$-algebrával.

*c*) Mutassa meg, hogy bármely $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-en értelmezett $\mu$ mértékre, és bármely $G \in \tau_{hl}$ nyílt halmazra

$$\mu(G) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq G, K \text{ compact in } \tau_{hl}\}.$$

*d*) Legyen $\mu := \overline{\lambda}_{\text{arctg}}\big|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$. Mutasson példát egy olyan, véges mértékű $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ halmazra, amelyre

$$\mu(A) < \inf\{\mu(G) : A \subseteq G \in \tau_{hl}\}.$$

Előfordulhat-e ez, ha a topológiát kicseréljük az euklideszi topológiára?

# 4. Integrálás

(15) Legyen $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Mutassa meg a monoton konvergencia-tétel felhasználásával, hogy

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} a(n,m) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} a(n,m).$$

(16) Számolja ki a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,n]} e^{-2x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n d\lambda(x)$$

értékét, ahol $\lambda$ a Lebesgue-mérték.

(17) Minden $n \in \mathbb{N}$-re legyen $f_n(x) := \frac{\pi + 2x^2 \operatorname{arctg}(nx)}{x^4(2-2^{-n}) + \sin\frac{1}{n}}$, $x \in \mathbb{R}$. Számolja ki a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[1,n]} f_n(x)\, d\lambda(x)$$

értéket, ahol $\lambda$ a Lebesgue-mérték!

(18) Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen $f_n(x) := ne^{-nx}$. Létezik-e integrálható domináló függvény az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozathoz a $[0,1]$ intervallumon? És $[1,\infty)$-en?

(19) Számolja ki a következő határértékeket! A számolások során felhasznált lépéseket indokolja!

*a*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty)} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} \sin\left(\frac{x}{n}\right) dx.$

*b*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}\, dx.$

*c*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty)} n \sin\left(\frac{x}{n}\right) (1+n^2x^2)^{-1}\, dx.$

(20) Bizonyítsa be a következő azonosságokat az integrandusok sorbafejtésével! Minden esetben indokolja, hogy miért lehet a sorfejtést tagonként integrálni!

*a*) $\displaystyle\int_{[-\infty,+\infty]} e^{-x^2} \cos(ax)\, dx = e^{-a^2/4}\sqrt{\pi}$ for all $a > 0$.

*b*) $\displaystyle\int_{[0,1]} x^a(1-x)^{-1} \log x\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} (a+k)^{-2}$ for all $a > -1$.

*c*) $\displaystyle\int_{[0,+\infty]} e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\, dx = \operatorname{arctg}(a^{-1})$ for all $a > 1$.

(21) Jelölje $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \kappa)$, illetve $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, a valós számegyenes Borel $\sigma$-algebráját ellátva a számlálómértékkel, illetve a Lebesguemértékkel.

*a*) Mik lesznek a $\kappa \times \lambda$ szerint véges mértékű elemei $\mathcal{B}(\mathbb{R})(\times)\mathcal{B}(\mathbb{R})$-nek?

*b*) Mutassa meg, hogy az $\{(x,x) : 0 \le x \le 1\}$ halmaz $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető, és határozza meg a $\kappa \otimes \lambda$ szerinti mértékét!

*c*) Mutassa meg, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} 1, & x = y \in [0,1], \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mérhető, és számolja ki a következő integrálokat!

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f\, d(\kappa\otimes\lambda), \qquad \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\kappa(x) \right) d\lambda(y), \qquad \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\lambda(y) \right) d\kappa(x).$$

Ellentmond-e az eredmény a Fubini-Tonelli-tételnek?

(22) Legyen $(\mathcal{X}, \mathcal{A}\,\mu) = (\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \kappa)$, a természetes számok hatványhalmaza ellátva a számlálómértékkel, és

$$f(m,n) := \begin{cases} 1, & m = n, \\ -1, & m = n+1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Mutassa meg, hogy $f$ $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mérhető, és számolja ki a következő integrálokat!

$$\int_{\mathbb{N}} \left( \int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\kappa(m) \right) d\kappa(n), \qquad \int_{\mathbb{N}} \left( \int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, dv(n) \right) d\kappa(m).$$

Ellentmond-e az eredmény a Fubini-Tonelli-tételnek?

# 5. $L^p$-terek

(23) Legyen $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ egy véges mértéktér.

*a*) Legyen $f : (\mathcal{X}, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ egy mérhető függvény. Bizonyítsa be, hogy bármely $1 \leq p < q \leq +\infty$ esetén

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \, \mu(\mathcal{X})^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \tag{5.1}$$

(az $\frac{1}{+\infty} := 0$ konvencióval). Speciálisan, ha $\mu$ valószínűségi mérték, akkor $p \mapsto \|f\|_p$ monoton növő.

*b*) Bizonyítsa be, hogy bármely $f : (\mathcal{X}, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvény esetén

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty .$$

*c*) Bizonyítsa be, hogy bármely $1 \leq p < q \leq +\infty$ esetén $\mathcal{L}^q(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu, \overline{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{L}^p(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu, \overline{\mathbb{R}})$.

(24) Tetszőleges $\mathcal{X}$ nemüres halmaz, és tetszőleges $0 < p \leq +\infty$ esetén legyen $l^p_{\mathcal{X}}(\mathbb{C}) := \mathcal{L}^p(\mathcal{X}, \mathcal{P}(\mathcal{X}), \kappa, \mathbb{C})$, ahol $\kappa$ a számlálómérték.

*a*) Mutassa meg, hogy minden $f \in \mathbb{C}^{\mathcal{X}}$ és minden $0 < p_1 < p_2 \leq +\infty$ esetén

$$\|f\|_{p_2} \leq \|f\|_{p_1}, \tag{5.2}$$

és egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\|f\|_{p_2} = +\infty$ vagy $\#\{x : f(x) \neq 0\} \leq 1$. Mutassa meg, hogy

$$l^{p_1}_{\mathcal{X}}(\mathbb{C}) \subseteq l^{p_2}_{\mathcal{X}}(\mathbb{C}) \subseteq l^{\infty}_{\mathcal{X}}(\mathbb{C}), \qquad 0 < p_1 < p_2, \tag{5.3}$$

és pontosan akkor van egyenlőség, ha $\mathcal{X}$ véges.

(Ötlet: Mutassa meg, hogy ha $\|f\|_r < +\infty$ valamely $r$-re, akkor $(|f(x)|/\|f\|_r)^{p_2/p_1} \leq |f(x)|/\|f\|_r$ minden $x$-re.)

*b)* Mutassa meg, hogy ha $f \in l^r_{\mathcal{X}}(\mathbb{C})$ valamely $r > 0$-ra, akkor

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty .$$

Igaz-e a fenti egyenlőség a feltevés nélkül?

(25) Léteznek olyan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető függvények, melyekre

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^3 \, d\lambda(x) < +\infty, \qquad \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^{\frac{3}{2}} \, d\lambda(x) < +\infty, \tag{5.4}$$

de $\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| \, d\lambda(x) = +\infty$? ($\lambda$ a Lebesgue-mérték.)

(26) (Fordított Hölder-egyenlőtlenség) Legyen $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér. Legyenek $p_1, s > 0$ és $p_2, \ldots, p_r < 0$ olyanok, hogy

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_r} = \frac{1}{s},$$

és legyenek $f_i \in \mathcal{L}^{p_i}(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$, $i = 1, \ldots, r$ olyanok, hogy $f_i(x) \neq 0$ $\mu$-m.m. $x$-re. Mutassa meg, hogy

$$\|f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_r\|_s \geq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \ldots \|f_r\|_{p_r} . \tag{5.5}$$

($p < 0$ esetén $\|f\|_p := \left(\int_{\mathcal{X}} |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}$ ugyanazzal a formulával van definiálva, mint $p > 0$-ra.)

# 6. Abszolút folytonosság és szingularitás

(27) Legyen $\mu$ előjeles mérték egy $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebrán. Mutassa meg, hogy

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(B) : B \subseteq A, \, B \in \mathcal{A}\},$$
$$\mu^-(A) = -\inf\{\mu(B) : B \subseteq A, \, B \in \mathcal{A}\}.$$

Mutasson egy olyan példát, ahol $|\mu|(A) \neq \sup\{|\mu(B)| : B \subseteq A, \, B \in \mathcal{A}\}$.

(28) (A Jordan-felbontás minimalitása) Mutassa meg, hogy ha egy $\mu$ előjeles mérték felbontható $\mu = \mu_1 - \mu_2$ alakban, ahol $\mu_1$ és $\mu_2$ pozitív mértékek, akkor $\mu^+ \leq \mu_1$ and $\mu^- \leq \mu_2$. (Ötlet: Tekintse egy Hahn-felbontását $\mu$-nek.)

(29) Legyenek $\nu, \mu_1, \ldots, \mu_r$ előjeles vagy komplex mértékek, és $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{K}$ olyan, hogy $\sum_{i=1}^r c_i \mu_i$ jól-definiált. Mutassa meg, hogy ha $\mu_i \perp \nu$ minden $i$-re, akkor $\sum_{i=1}^r c_i \mu_i \perp \nu$. Mutassa meg, hogy ha minden $\mu_i$ nemnegatív, és minden $c_i > 0$, akkor a fenti implikáció az ellenkező irányban is teljesül.

(30) Mutassa meg, hgy ha $\mu_1, \mu_2$ nemnegatív mértékek egy $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebrán, akkor $\mu_1 \perp \mu_2$ pontosan akkor, ha az egyetlen nemnegatív $\nu$ mérték $\mathcal{A}$-n, amelyre $\nu \leq \mu_1$ és $\nu \leq \mu_2$, az a $\nu = 0$ mérték.

(31) Legyen $\lambda$ a Lebesgue-mérték, $\kappa$ a számlálómérték, és $\delta_x$ az $x$ pontra koncentrált Dirac-mérték, mindegyik a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel $\sigma$-algebrán értelmezve. Döntse el a következő mértékpárokról, hogy hogy szingulárisak-e, valamelyik abszolút folytonos a másikra nézve, mindkettő, vagy egyik sem. Válaszát indokolja.

$a)$ $(\lambda, \kappa)$, $b)$ $(\lambda, \delta_0 - \delta_1)$, $c)$ $(\kappa, \delta_0 - \delta_1)$,

$d)$ $(\delta_1 + \delta_2, \delta_0 - \delta_1)$, $e)$ $(\lambda, \overline{\lambda}_{\mathrm{arctg}}\big|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})})$.

(32) Legyenek $\mu, \nu$ előjeles mértékek valamey $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebrán. Mutassa meg, hogy ha $\nu \ll \mu$ és $\nu \perp \mu$, akkor $\nu = 0$.

(33) Legyen $\mathcal{X} := [0,1]$, $\mathcal{A} := \mathcal{B}([0,1])$, $\lambda$ a Lebesgue-mérték, és $\kappa$ a számlálómérték $\mathcal{A}$-n. Mutassa meg, hogy $\lambda \ll \kappa$, de nem létezik olyan nemnegatív mérhető $f$ függvény, amelyre $\lambda = f\kappa$, valamint $\kappa$-nak nem létezik Lebesgue-felbontása $\lambda$-ra nézve. Ellentmondanak ezek a Lebesgue-Radon-Nikodym-tételnek?

(34) $a)$ Legyen $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ egy $\sigma$-véges mértéktér, legyen $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$, és $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ egy rész-$\sigma$-algebrája $\mathcal{A}$-nak. Mutassa meg, hogy létezik egy $\mu\big|_{\mathcal{B}}$-m.m. egyértelmű $g \in \mathcal{L}^1(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu\big|_{\mathcal{B}}, \mathbb{K})$, amelyre

$$\int_B g\, d\mu = \int_B f\, d\mu, \qquad B \in \mathcal{B}.$$

Ezt a $g$ függvényt az $f$ $\mathcal{B}$-re vett feltételes várható értékének nevezik, és $\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{B})$-vel jelölik.

(Ötlet: Alkalmazza a Radon-Nikodym-tételt az $(f\mu)\big|_{\mathcal{B}}$ és a $\mu\big|_{\mathcal{B}}$ mértékekre.)

$b)$ Legyen $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér, és $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$. Legyen $\mathcal{X} = \cup_{k=1}^m \mathcal{X}_k$ egy partíciója $\mathcal{X}$-nek, ahol $\mathcal{X}_k \in \mathcal{A}$ minden $k$-ra, és legyen $\mathcal{B} := \sigma\left(\{H_k :\ k = 1, \ldots, m\}\right)$. Határozza meg $\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{B})$-t.