VIZSGAFELADATOK

(1) Bizonyítsuk be, hogy ha (X,d) egy metrikus tér, akkor a $d(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ metrika az X halmazon.

(2) Bizonyítsuk be, hogy ha (X_1,d_1) és (X_2,d_2) metrikus terek, akkor az $X_1 \times X_2$ halmazon az

$$\alpha d_1 + \beta d_2$$

egy metrika, ahol $\alpha, \beta > 0$.

(3) A skaláris szorzat tulajdonságait felhasználva bizonyitsuk be, hogy az Euklideszi tér metrikus tér az indukált metrikával.

(4) Bizonyítsuk be, hogy egy metrikus tér topologikus tér is az $r > 0$ sugarú és tetszőleges középpontú nyílt környezetekkel, mint bázissal.

(5) Mutassuk meg, hogy a diszkrét metrikus tér valamilyen megszámlálható alaphalmazzal homeomorf azzal a topologikus térrel, amit úgy kapunk, hogy a valós számegyenes szokásos Euklideszi topológiáját megszorítjuk az egész számok halmazára.

(6) Legyen $X = \{1,2,3\}$. Hány különböző topologikus tér létezik az X alaphalmazzal?

(7) Bizonyítsuk be, hogy a hányados topológia tényleg topológia (az axiómák alapján).

(8) Mutassuk meg, hogy véges sok halmaz uniójának lezárása ugyanaz, mint a lezárások uniója.

(9) Mutassuk meg, hogy egy X metrikus térben az $\{x : d(x,a) \leq r\}$ halmaz zárt, ahol $r > 0$ és $a \in X$ rögzítettek.

(10) Mutassuk meg, hogy egy tér T_1 pontosan akkor, ha minden egyelemű halmaza zárt halmaz.

(11) Bizonyítsuk be, hogy egy T_2 térben minden sorozatnak legfeljebb csak egy darab határértéke lehet.

(12) Bizonyítsuk be, hogy M_2 terek véges direkt szorzata is M_2.

(13) Legyen $A \subset X$ rögzített az X metrikus térben. Bizonyítsuk be, hogy az X-beli pontok A-tól vett távolsága, mint $X \to [0,\infty)$ függvény, folytonos.

June 7, 2019.

(14) Bizonyítsuk be, hogy egy leképezés folytonos pontosan akkor, ha minden halmaz lezárását a halmaz képének lezárásába viszi.
(15) Mutassuk meg, hogy ha $f\colon X \to Y$ egy leképezés két topologikus tér között, akkor ha X M_1 és f sorozatfolytonos minden pontban, akkor f folytonos is.
(16) Bizonyítsuk be, hogy a diszkrét metrikus terek totálisan összefüggéstelenek.
(17) Mutassuk meg, hogy összefüggő halmaz folytonos leképezés általi képe is összefüggő.
(18) Bizonyítsuk be, hogy két összefüggőségi komponens vagy diszjunkt, vagy egybeesik.
(19) Mutassunk példát olyan metrikus térre és benne olyan korlátos és zárt halmazra, ami nem kompakt.
(20) Bizonyítsuk be, hogy kompakt topologikus tér folytonos leképezés általi képe is kompakt.
(21) Bizonyítsuk be, hogy egy teljes metrikus tér egy zárt részhalmazra vett megszorítása is teljes metrikus tér.
(22) Mutassuk meg, hogy egy differenciálható sokaságon egy adott érintővektor szerinti iránymenti deriválás lineáris leképezés a differenciálható függvények vektorterén.
(23) Bizonyítsuk be a Leibniz szabályt függvények szorzatának iránymenti deriválására.
(24) Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi térben az $\{x : |x| = 1\}$ altér egy 2-dimenziós sokaság.