Topológia és differenciálható sokaságok segédanyag

Szabó Szilárd

2018. április

Feladat 1 *Legyen* $X = M$ *egy Möbius-szalag,* $A = \partial M \cong S^1$ *a pereme,* $Y = D$ *az egységlemez* $\mathbf{R}^2$*-ben, és* $B = \partial D$ *a pereme, végül* $f : A = S^1 \to B = S^1$ *tetszőleges homeomorfizmus. Lássuk be, hogy* M *ragasztása* D*-vel* f *mentén a valós projektív sík!*

Feladat 2 *Legyenek* $\mathbf{RP}_1$ *és* $\mathbf{RP}_2$ *a valós projektív síkkal homeomorf terek, és* $D_i \subset \mathbf{RP}_i$ *olyan, a két-dimenziós* D^2 *nyílt egységkörlappal homeomorf részhalmazok, amelyek* $\mathbf{RP}_i$*-beli lezártjai a zárt egységkörlappal homeomorfak. Legyen* $X_i = \mathbf{RP}_i \setminus D_i$*,* ∂X_i *az* X_i *pereme, és* f *egy homeomorfizmus* ∂X_1 *és* ∂X_2 *között. Bizonyítsuk be, hogy* $X_1 \cup_f X_2$ *homeomorf a Klein-kancsóval!*

Feladat 3 *Legyen* $g : M \to \mathbf{RP}^2$ *az egységnégyzet identikus leképezése által értelmezett folytonos leképezés a Möbius-szalagból a valós projektív síkba. Határozzuk meg a* g_* *indukált homomorfizmust a fundamentális csoportok között!*

Feladat 4 *Legyenek* $A, B \subset \mathbf{R}^2$ *korlátos, Lebesgue-mérhető halmazok. Bizonyítsuk be, hogy létezik legalább egy olyan* $e \subset \mathbf{R}^2$ *egyenes, amely* A*-t és* B*-t is két egyenlő területű részre osztja!*

Feladat 5 *Legyen* $p : G \to H$ *egy fedőleképezés, ahol* H *topologikus csoport. Legyen* $e \in H$ *az egységelem és* $e^* \in p^{-1}(e)$ *tetszőleges. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik pontosan egy csoport-struktúra* G*-n, amelynek* e^* *az egységeleme és amelyre* p *csoport-homomorfizmus!*

Feladat 6 *Léteznek-e a következő terek között fedőleképezések?*

- $\mathbf{RP}^n \to T^n$
- $\mathbf{C}^* \to T^2$
- $\mathbf{C}^* \to M$*, ahol* M *a Möbius-szalag*
- $\mathbf{RP}^2 \to K$*, ahol* K *a Klein-kancsó.*