Differenciálegyenletek 2 (BMETE93AM18) mintafeladatsor záróvizsgára

2018. március 13.

Készítette: Dr. Kovács Sándor

Feladatok

---

1. Legyen $\omega, K, \alpha \in \mathbb{R}$. **Ábrázolja** az α-K-síkon a

$$p(z) := z^4 + z^3 + z^2\omega^2 + z(\omega^2 + K) + K\alpha \qquad (z \in \mathbb{K})$$

polinom stabilitási tartományát!

2. A Mikhailiv-kritérium felhasználásával **döntse el**, hogy a

$$p(z) := z^4 + 9z^3 + 13z^2 + 54z + 40 \qquad (z \in \mathbb{K})$$

polinom stabilis-e!

3. **Határozza meg** az

$$M := \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

mátrix minimálpolinomjának együtthatóit, majd a centrális, a stabilis, ill. a labilis alteret! Stabilis-e, ill. hiperbolikus-e az M mátrix?

4. Legyen $x_0, y_0, a \in \mathbb{R}$. **Vizsgálja meg**, hogy van-e olyan $\varepsilon, \delta > 0$ szám, ill.

$$\varphi : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$$

deriválható függvény, amelyre

$$x^2 + 2x\varphi(x) - \varphi^2(x) = a \qquad (|x - x_0| < \varepsilon)$$

teljesül! Ha van ilyen függvény, akkor **számítsa ki** a deriváltját az x_0 pontban!

5. Legyen $m := 100$, $\alpha := 0.1$, $g := 10$, ill. $v_0 := 20$. **Határozza meg** az

$$m\dot{y}(t) = mg - \alpha y^2(t) \quad (t \in [0, +\infty)), \qquad y(0) = v_0$$

kezdetiérték-feladat v megoldását és a

$$v_\infty := \lim_{t \to +\infty} v(t)$$

határértéket! Egyértelmű megoldása-e a kezdetiérték-feladatnak $v_0 := 100$ esetén a

$$\varphi(t) := v_0 \qquad (t \in [0, +\infty))$$

függvény?

6. A szukcesszív approximáció módszerét felhasználva **oldja meg** az

$$\mathbf{y}'(x) = (2y_2(x) - 3y_1(x), y_2(x) - 2y_1(x)) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \mathbf{y}(0) = (-1, -1)$$

kezdetiérték-feladatot!

7. Az

$$x'(t) = -x(t), \quad y'(t) = x(t) - y(t), \quad z'(t) = y(t) + e^{-t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

rendszer esetében

(a) **határozza meg** az $(x(0), y(0), z(0)) = (-1, 0, 0)$ kezdeti értékhez tartozó μ megoldást;

(b) **vizsgálja meg** a fenti μ stabilitását!

8. **Vizsgálja** az

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{y}{2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \\ y' &= y\left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{aligned}\right\} \qquad ((0,0) \neq (x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

rendszer $\varphi(\cdot, (1, 0))$ megoldását stabilitás és vonzás szempontjából!

9. Adott $D, k, m > 0$ esetén **vizsgálja meg** az

$$my'' = -Dy - ky'$$

rendszer stabilitását!

10. Legyen $\mu \in \mathbb{R}$, majd tekintse az

$$x' = y - x(x^2 + y^2 - \mu), \qquad y' = -x - y(x^2 + y^2 - \mu)$$

rendszert.

(a) **Határozza meg** a rendszer egyensúlyi helyzeteit, majd **vizgálja** azok stabilitását!

(b) **Igazolja**, hogy $\mu \leq 0$ esetén a rendszernek nincsen periodikus megoldása, majd **mutassa meg**, hogy $\mu > 0$-ra a

$$p(t) := (\sqrt{\mu}\cos(t), \sqrt{\mu}\sin(t)) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvénya rendszer egy periodikus megoldása!

(c) **Számítsa ki** $\mu > 0$ esetén a rendszer p-re vonatkozó variációs rerndszerének karakterisztikus multiplikátorait!

11. **Határozza meg** az

$$x' = -x^3 - y, \qquad y' = x - y^3$$

rendszer kritikus egyensúlyi helyzeteit, majd **vizsgálja meg** azok stabilitását!