Differenciálegyenletek 1 (BMETE93AM15)

záróvizsga feladatsor

Összeállította: Dr. Moson Péter, 2018. március 22.

Feladatok

1. Találja meg a $\frac{dy}{dx} = \sin^2(y) - 1 + x\cos^2(y)$ egyenlet $y(1) = \frac{\pi}{2}$ és $y(1) = 0$ kezdeti érték problémái megoldásait.
2. Találja meg a $y' = \left(3x^2 - 4\right)e^{x^3-4x-y}$ egyenlet általános megoldását. Oldja meg az $y(2) = 0$ kezdetiérték-feladatot.
3. Találja meg a $\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos x - 1}{\sin x}$, $0 < x < \pi$ egyenlet $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ kezdeti érték probléma $y = y(x)$, $0 < x < \pi$ megoldását.
4. Határozza meg az $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x+y}$ differenciálegyenlet általános megoldását. Rajzolja le az $y(1) = -2$ kezdeti érték feladat megoldásának integrálgörbéjét.
5. Oldja meg az $y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$ elsőrendű differenciálegyenlet $y(0) = 0$ kezdeti érték problémáját.
6. Találja meg az $y = ce^{-2x}$ görbesereg ortogonális görbeseregét. Ábrázolja mindkét görbecsaládot. Találja meg az $xy - y = c$ görbesereg ortogonális görbeseregét. Ábrázolja mindkét görbecsaládot.
7. Keresse meg az $y'' + 2y' - 3y = (8x + 2)e^x$ differenciálegyenlet $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ kezdeti érték problémájának megoldását kétféleképpen: (i) lineáris állandó együtthatós egyenlet, (ii) Laplace transzformáció).
8. Keresse meg az $y'' - 3y' + 2y = 4(x - 1)$ differenciálegyenlet $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ kezdeti érték problémájának megoldását háromféleképpen: (i) lineáris állandó együtthatós egyenlet, (ii) Laplace transzformáció), (iii) Newton- módszer (a negyedfokú tagokig). Vizsgálja a megoldásfüggvényt (teljes függvényvizsgálat).

9. Oldja meg az $y' - 3y + 2\int_0^x y(t)dt = 2x^2 - 4x$, $y(0) = 0$ integrálegyenletet (kétféleképpen: Laplace transzformáció, visszavezetés differenciálegyenletre).
10. Tekintse az $y' = y^3 - 4y$ differenciálegyenletet. Rajzolja le pályagörbéit, illetve vázolja néhány jellemző integrálgörbéjét (megkeresve az esetleges inflexiós pontokat).
11. Találja meg az $xy - y = c$ görbesereg ortogonális görbeseregét. Ábrázolja mindkét görbecsaládot.
12. Tekintse az $y' = e^y - y - 1$ differenciálegyenletet. Rajzolja le pályagörbéit, illetve vázolja néhány jellemző integrálgörbéjét (megkeresve az esetleges inflexiós pontokat).
13. Keresse meg az $\dot{x} = -2y,\ 2\dot{y} = x - 2$, $x(0) = 4,\ y(0) = 0$ differenciálegyenlet-rendszer kezdetiérték-feladatának megoldását négyféleképpen: (i) az egyenletrendszer visszavezetése egyenletre, (ii) lineáris állandó együtthatós egyenletrendszer – mátrix módszer, (iii) Laplace transzformáció), (iv) Newton- módszer (a harmadfokú tagokig). Rajzolja le ezen megoldás pályáját. Milyen görbéről van szó?
14. Rajzolja le az $\begin{aligned}\dot{x} &= -x + ay + 1\\ \dot{y} &= x - y - 1\end{aligned}$ $a = -1,\ +9$, autonóm differenciálegyenlet-rendszerek fázisképet. Írja fel az általános megoldást is.
15. Tekintse az $\begin{aligned}\dot{x} &== 3x - 3x^2 - 3xy\\ \dot{y} &= 4y - 2xy - 2y^2\end{aligned}$ autonóm differenciálegyenlet-rendszert. Keresse meg egyensúlyi helyzeteit, állapítsa meg típusukat (csomó, fókusz, nyereg, stb.), és vázolja a lokális fázisképeket.
16. Vizsgálja az $\dot{x} = -4x - 2y,\quad \dot{y} = -2x - 6y + 2z,\quad \dot{z} = 2x - 4y - 6z$ lineáris differenciál-egyenletrendszer triviális megoldása Ljapunov stabilitását (kétféleképpen: karakterisztikus egyenlet gyökei, Hurwitz kritérium).