Differenciálegyenletek 1 (BMETE93AM15)

záróvizsga feladatsor

Összeállította: Dr. Moson Péter, 2018. március 22.

Feladatok

1. Találja meg a $\frac{dy}{dx} = \sin^2(y) - 1 + x\cos^2(y)$ egyenlet $y(1) = \frac{\pi}{2}$ és $y(1) = 0$ kezdeti érték problémái megoldásait.
2. Találja meg a $y' = \left(3x^2 - 4\right)e^{x^3-4x-y}$ egyenlet általános megoldását. Oldja meg az $y(2) = 0$ kezdetiérték-feladatot.
3. Találja meg a $\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos x - 1}{\sin x}$, $0 < x < \pi$ egyenlet $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ kezdeti érték probléma $y = y(x)$, $0 < x < \pi$ megoldását.
4. Határozza meg az $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x+y}$ differenciálegyenlet általános megoldását. Rajzolja le az $y(1) = -2$ kezdeti érték feladat megoldásának integrálgörbéjét.
5. Oldja meg az $y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$ elsőrendű differenciálegyenlet $y(0) = 0$ kezdeti érték problémáját.
6. Találja meg az $y = ce^{-2x}$ görbesereg ortogonális görbeseregét. Ábrázolja mindkét görbecsaládot. Találja meg az $xy - y = c$ görbesereg ortogonális görbeseregét. Ábrázolja mindkét görbecsaládot.
7. Keresse meg az $y'' + 2y' - 3y = (8x + 2)e^x$ differenciálegyenlet $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ kezdeti érték problémájának megoldását kétféleképpen: (i) lineáris állandó együtthatós egyenlet, (ii) Laplace transzformáció).
8. Keresse meg az $y'' - 3y' + 2y = 4(x - 1)$ differenciálegyenlet $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ kezdeti érték problémájának megoldását háromféleképpen: (i) lineáris állandó együtthatós egyenlet, (ii) Laplace transzformáció), (iii) Newton- módszer (a negyedfokú tagokig). Vizsgálja a megoldásfüggvényt (teljes függvényvizsgálat).

9. Oldja meg az $y' - 3y + 2\int_0^x y(t)dt = 2x^2 - 4x$, $y(0) = 0$ integrálegyenletet (kétféleképpen: Laplace transzformáció, visszavezetés differenciálegyenletre).
10. Tekintse az $y' = y^3 - 4y$ differenciálegyenletet. Rajzolja le pályagörbéit, illetve vázolja néhány jellemző integrálgörbéjét (megkeresve az esetleges inflexiós pontokat).
11. Találja meg az $xy - y = c$ görbesereg ortogonális görbeseregét. Ábrázolja mindkét görbecsaládot.
12. Tekintse az $y' = e^y - y - 1$ differenciálegyenletet. Rajzolja le pályagörbéit, illetve vázolja néhány jellemző integrálgörbéjét (megkeresve az esetleges inflexiós pontokat).
13. Keresse meg az $\dot{x} = -2y$, $2\dot{y} = x - 2$ differenciálegyenlet-rendszer $x(0) = 4$, $y(0) = 0$ kezdetiérték-feladatának megoldását négyféleképpen: (i) az egyenletrendszer visszavezetése egyenletre, (ii) lineáris állandó együtthatós egyenletrendszer – mátrix módszer, (iii) Laplace transzformáció), (iv) Newton- módszer (a harmadfokú tagokig). Rajzolja le ezen megoldás pályáját. Milyen görbéről van szó?
14. Rajzolja le az
$$\dot{x} = -x + ay + 1$$
$$\dot{y} = x - y - 1 \qquad a = -1, \quad +9$$
autonóm differenciálegyenlet-rendszerek fázisképet. Írja fel az általános megoldást is.
15. Tekintse az
$$\dot{x} == 3x - 3x^2 - 3xy$$
$$\dot{y} = 4y - 2xy - 2y^2$$
autonóm differenciálegyenlet-rendszert. Keresse meg egyensúlyi helyzeteit, állapítsa meg típusukat (csomó, fókusz, nyereg, stb.), és vázolja a lokális fázisképeket.
16. Vizsgálja az $\dot{x} = -4x - 2y$, $\dot{y} = -2x - 6y + 2z$, $\dot{z} = 2x - 4y - 6z$ lineáris differenciál-egyenletrendszer triviális megoldása Ljapunov stabilitását (kétféleképpen: karakterisztikus egyenlet gyökei, Hurwitz kritérium).

Megoldások (vázlatosan)

1. Szétválasztható egyenlet. $\frac{dy}{dx} = (x-1)\cos^2(y)$. Általános megoldás: (i) $\cos^2(y) = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ megoldások. (ii) $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ esetén

$y=\arctan\left(\frac{(x-1)^2}{2}+c\right)$. Az $y(1)=\frac{\pi}{2}$ kezdeti érték feladat megoldása $y(x)=\frac{\pi}{2}$. Az $y(1)=0$ kezdeti érték feladat megoldása $y(x)=\arctan\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)$.

2. Szétválasztható egyenlet. Általános megoldás: $y=\ln\left(e^{x^3-4x}+c\right).$ A kezdetiérték-feladat megoldása $y(x)=x^3-4x.$
3. Lineáris egyenlet. Az általános megoldás $y=c\sin x+\cos x$ 6%. Az $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ kezdeti érték feladat megoldása $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.
4. Többféleképpen oldható meg (lineáris, homogén fokszámú, egzakt, …). Általános megoldás $xy+\frac{y^2}{2}=c$, $x+y\neq 0$. Kezdeti érték feladat $y=-2x.$, $x>0$.
5. Egzakt egyenlet. Általános megoldás: $xe^y-y=c.$ A kezdetiérték-feladat megoldása $x(y)=ye^{-y}$.
6. Ortogonális görbesereg $x=y^2+c$, az $x-$ tengely mentén eltolt parabolák. Az eredeti görbesereg exponenciális függvények.
7. Az ortogonális trajektóriák $(x-1)^2-y^2=c$. Mindkét görbesereg derékszögű hiperbolák.
8. Általános megoldás $y=c_1e^x+c_2e^{-3x}+x^2e^x.$ Kezdeti érték feladat $y=x^2e^x.$
9. Általános megoldás $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+2x+1.$ Kezdeti érték feladat $y=2x+1-e^{2x}.$

   Newton módszer $y(x)=-2x^2-\frac{4}{3}x^3-\frac{2}{3}x^4.$
10. Az egyenlet deriválás, illetve $y'(0)=0$ kezdeti érték meghatározásával visszavezethető az előző egyenletre. A Laplace transzformálás is ugyanazt az egyenletet adja (p-vel átszorzás után). Így $y=2x+1-e^{2x}.$

11. Egyensúlyi helyzetek: $y_1 = 0$ (stabilis), $y_2 = -2$, $y_3 = 2$ (instabilisek). Integrálgörbék: $y = -2$, $y = 0$, $y = 2$ állandó megoldások. Inflexiós pontok $y_{4,5} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

12. Egyensúlyi helyzet: $y = 0$ (balról tart hozzá a pálya, jobbról eltávolodik.), Az integrálgörbék negatív y-ra konkávok, pozitív y-ra konvexek, nincs inflexiós pontjuk

13. A kezdetiérték-feladatának megoldása $x = 2 + 2\cos t, y = \sin t$. A pályagörbe az $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$ ellipszis.

14. Egyensúlyi helyzet $(x, y) = (1, 0)$. $a = -1$-re stabilis fókusz pozitív körüljárással. $a = +9$-re nyeregpont *3+3=6%.* Általános megoldások $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

15. Egyensúlyi helyzetek $(x_1, y_1) = (0, 0)$ instabilis csomó, $(x_2, y_2) = (1, 0)$ nyeregpont, $(x_3, y_3) = (0, 2)$ stabil csomó.

16. Aszimptotikusan stabilis. A karakterisztikus egyenlet $\lambda^3 + 16\lambda^2 + 88\lambda + 160 = 0$, a gyökök $\lambda_1 = -4, \lambda_{2,3} = -6 \pm 2i$. (Megjegyzés: egyszerűbb a számítás, ha a mátrix elemeit leosztjuk 2-vel.)