Feladatok

Simonovits A. (2018) Bevezetés a közgazdasági modellekbe c. jegyzete alapján.

1.4. feladat. Legyen $c_i > 0$ az i-edik éves fogyasztás, és $y_i > 0$ az i-edik éves jövedelem, $i = 1, 2, \ldots, I$. Legyen a fogyasztó életpálya hasznosságfüggvénye Cobb–Douglas:

$$U(c_0, \ldots, c_I) = \sum_{i=0}^{I} \delta^i \log c_i,$$

ahol δ 0 és 1 közti szám a leszámítolási tényező. Számítsa ki az optimális fogyasztási pályát, ha $r > 0$ a kamattényező, akkor korlátozás és büntetés nélkül fel lehet venni fogyasztói kölcsönt!

1.5. feladat. Tegyük föl, hogy egy dolgozó egységnyi időbérért cserében idejének l részében dolgozik. Adót is fizet (t), s az abból fedezett közszolgálatok hatását nem veszi figyelembe. Fogyasztása $c = l(1-t)$ és szabadideje $1-l$, s ezeket együtt a következő hasznosságfüggvény szerint értékeli:

$$U(c, l) = \log c + \xi \log(1-l),$$

ahol $\xi > 0$ egy valós paraméter.

a) Határozza meg az optimális munkaidőt!

b) Miért nem csökken az optimális munkakínálat az adókulcs emelésével?

c) Milyen tényezők hatnak a valóságban még a munkavégzésre?

2.3. feladat. „Gyáva nyúl." Két autós a következő életveszélyes játékkal szórakozik. Egy keskeny híd két végéről indulnak egymással szembe – és sokan nézik őket. Két döntés lehetséges: Kitérni vagy Hajtani. Ha mindkettő Hajt, akkor egymásnak ütköznek a hídon, a „nyereségpár" $(-3, -3)$. Ha mindkettő Kitér, akkor leégnek a nézők előtt: a „nyereségpár" $(1, 1)$. Ha az első Kitér, s a második Hajt, akkor az 1. pofára esik, a második sikert arat: a „nyereségpár" $(0, 2)$, és hasonlóan a szimmetrikus esetben $(2, 0)$.

a) Van-e a játéknak tiszta Nash-egyensúlya?

b) Határozzuk meg a játék kevert Nash-egyensúlyát!

c) Mi a valószínűsége, hogy a kevert Nash-egyensúlyban a versenyzők életben maradnak?

d) Melyik egyensúly adja a legnagyobb hasznot az 1. játékosnak?

4.2. feladat. Igazoljuk, hogy a kétszemélyes nullaösszegű játéknál a Nash-egyensúly ekvivalens a minimax-feltétellel:

$$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2) = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2).$$

4.3. feladat. a) Lineáris keresleti függvény és különböző lineáris költségfüggvényű két vállalat esetén határozzuk meg a Cournot-egyensúlyt! b) Mikor igaz, hogy a legjobb-válasz függvény kontrakció?

6.1. feladat. Négyzetgyökvonás. 4000 évvel ezelőtt a babiloniak egy β pozitív szám pozitív négyzetgyökét a következő iterációs eljárással számíthatták ki:

$$x_t = f(x_{t-1}) = \frac{1}{2}\left(x_{t-1} + \frac{\beta}{x_{t-1}}\right),$$

ahol x_0 egy tetszőleges pozitív szám.

a) Rajzoljuk föl a dinamikát egy x_t, x_{t+1}-síkban. Bizonyítsuk be az eljárás konvergenciáját grafikusan a $\beta < x_0 < \infty$ tartományra! b) Bizonyítsuk be, hogy az eljárás mindig β négyzetgyökéhez konvergál!

6.3. feladat. Bizonyítsa be, hogy egy másodrendű homogén lineáris differencia-egyenlet nem lehet kaotikus, azaz nem lehet egyszerre korlátos és érzékeny a kezdeti feltételekre!

6.4. feladat. *Sátorleképzés*nek nevezzük a következő leképezést:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 \le x \le 1/2; \\ 2 - 2x, & \text{ha } 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

a) Bizonyítsuk be, hogy a sátorleképzésnek pontosan két 3-ciklusa van: $\{2/9, 4/9, 8/9\}$ és $\{2/7, 4/7, 6/7\}$, és mindkét ciklus instabil!

b) Milyen érvek szólnak amellett, hogy a rendszer kaotikus?

8.3. feladat. Stackelberg-játék a kormány és az állampolgárok között. A kormány személyi jövedelemadót vet ki az állampolgárokra θ adókulccsal, amelynek bevételét egyenlő mértékben szétosztja közöttük, eredmény γ. A w órabérű játékos munkakínálata l, adózás előtti jövedelme wl, tehát fogyasztása

$$c = \gamma + (1-\theta)wl. \tag{8.1}$$

Tegyük föl, hogy hasznosságfüggvénye

$$U(w, c, l) = 2c - wl^2. \tag{8.2}$$

a) Határozza meg a w órabérű dolgozó munkakínálatát, ha az adottnak veszi az alapjövedelem értékét!

b) Határozza meg az egy dolgozóra jutó befizetett adót, ha az órabérek eloszlása adott, és átlaga 1.

c) Milyen adókulcs adja a maximumot és mennyi a hozzátartozó munkakínálat?

d) Tegyük föl, hogy két típus van: L és H, $w_L = 1/2$ és $w_H = 2$. Mekkora a két típus relatív gyakorisága és fogyasztása?

e) Mi lett volna a munkakínálatokkal és a fogyasztásokkal, ha nincs adó?

9.1. feladat. Háromnemzedékes modellel dolgozva ($D = 2$) tegyük föl, hogy csak a második nemzedék szülőképes ($f_0 = f_2 = 0$) és $f_1 = 2$. a) Határozzuk meg a népesség egyensúlyi növekedési tényezőjét! b) Tegyük föl, hogy mindenki maximális korig él, és határozzuk meg a népesség stabil koreloszlását a 0-dik időszakban, 1-nek véve a idősek számát. c) Tegyük föl, hogy a népesség eredetileg növekedett, de a $t = 2$ időszaktól kezdve a termékenységi együttható 1-re, illetve d) az eredeti érték reciprokára csökken. Írjuk le táblázatban néhány időszak koreloszlását mindkét esetben, és számítsuk ki az össznépességét $\nu = 2$-re!

9.2. feladat. Tegyük föl, hogy a mindenkori népesség 4 korosztályból áll, a 0–14 évesek, a 15–29 évesek, a 30–44 évesek és a 45–59 évesek. Mindenki a 60. születésnapján hal meg. A rendszerről minden 15. évben készítünk felvételt. Tegyük föl, hogy a t-edik időszakban a születések száma b_t az 15–29 és a 30–44 évesek létszámának a pozitív lineáris kombinációja: $b_t = f_1 b_{t-1} + f_2 b_{t-2}$, $f_1, f_2 > 0$.

a) Határozzuk meg a stabil népesség születésszámának növekedési tényezőjét (=1+növekedési ütem)!

b) Mi annak a feltétele, hogy létezzék *stacioner* stabil népesség, azaz alkalmas b_{-1}, b_{-2} kezdőállapot esetén a születésszám változatlan legyen?

c) Bizonyítsuk be, hogy a b) esetben tetszőleges b_{-1}, b_{-2} kezdőállapot esetén a születésszám növekedési tényezője tart 1-hez!

10.2. feladat. Legyen $L = 0$ a munkába lépés kora, R a nyugdíjba vonulás kora és D a halálozás kora: $0 < R < D$, valamint $w > 0$ az éves bér – valós számok. Legyen a halálozási kor eloszlása adott, és a várható értéke $\mathbf{E}D$. A (10.2) szabályában az egyéni D élettartam helyett a várható $\mathbf{E}D$ élettartamot írva, az éves nyugdíj

$$b(R) = \frac{\tau w R}{\mathbf{E}D - R}.$$

Legyen $z(D, R)$ az D élettartamú dolgozók életpálya-befizetéseinek és kifizetéseinek az egyenlege.

$$z(D, R) = \tau(R - L) - b(w, R)(D - R). \tag{10.5}$$

a) Igazoljuk, hogy $z(D, R) = b(R)(\mathbf{E}D - D)$.

b) Tegyük föl, hogy két típus van, a várhatóan rövid, illetve hosszú életű: $D_1 < \mathbf{E}D < D_2$, f_1 és f_2 valószínűséggel és $0 < R_1 < R_2$. Igazoljuk, hogy a várható életpálya egyenleg negatív!

12.1. feladat. Jelölje $B(T)$ a T futamidőhöz tartozó törlesztést

$$B(T) = \frac{(R - 1)D_0}{1 - R^{-T}}, \qquad R > 1. \tag{12.3}$$

Igazoljuk, hogy $B(T) = B(2T)(1 + R^{-T})$, ezért $R > 1$ esetén a futamidő megduplázása nem felezi a törlesztőrészletet: $B(2T) > B(T)/2$!

Feladatmegoldások

1.4. feladat. a) Az egyén életpálya keresetének jelenértéke azonos a fogyasztási pálya jelenértékével.

b) Lagrange-függvény:

$$L(c_0,\ldots,c_I)=\sum_{i=0}^{I}[-\delta^i c_i^{-1}+\lambda(y_i-c_i)r^{-i}].$$

Deriválva c_i szerint:

$$L'_{c_i}(c_0,\ldots,c_I)=\delta^i c_i^{-2}-\lambda r^{-i}=0,\qquad \text{azaz}\qquad c_i=\lambda^{-1/2}\delta^{i/2}r^{i/2},\qquad c_0=\lambda^{-1/2}.$$

Behelyettesítve a költségvetési feltételbe:

$$\sum_{i=0}^{I}y_i r^{-i}=\sum_{i=0}^{I}c_i r^{-i}=\sum_{i=0}^{I}\lambda^{-1/2}\delta^{i/2}r^{i/2}r^{-i}=c_0\sum_{i=0}^{I}\delta^{i/2}r^{-i/2}.$$

Innen

$$c_0=\frac{\sum_{i=0}^{I}y_i r^{-i}}{\sum_{i=0}^{I}\delta^{i/2}r^{-i/2}}\qquad \text{és}\qquad c_i=c_0\delta^{i/2}r^{i/2},\qquad i=1,2,\ldots,I$$

stb.

1.5. feladat. a) Behelyettesítve a fogyasztási függvényt:

$$U[l]=\log((1-t)l)+\xi\log(1-l).$$

Elhagyva a $\log(1-t)$ tagot, deriválva maradék függvényt és nullává téve a deriváltat, adódik a szélsőérték feltétele:

$$0=U'[l]=\frac{1}{l}-\xi\frac{1}{1-l}.$$

Rendezve:

$$l^*=\frac{1}{1+\xi}.$$

b) Mert a hasznosságfüggvény speciális szerkezetű.

c) Van-e munka? Nem túl drága-e a munkába járás (és nők esetén a házimunka kiváltása)?

2.3. feladat. a) A (H, H) pár nem egyensúly, mert hozama pl. az 1. számára –3, s ha egyoldalúan eltér tőle, azaz K-t választja, akkor hozama 0-ra nő. A (K, K) pár sem egyensúly, mert hozama pl. az 1. számára 1, s ha egyoldalúan eltér tőle, azaz H-t választja, akkor hozama 2-re nő. Viszont a (H, K) és a (K, H) pár mindegyike Nash-egyensúly. Pl. ha (K, H)-tól az 1. játékos eltérne, akkor hozama 0-ról –3-ra csökkenne; ha a 2. játékos térne el, akkor pedig annak hozama 2-ről 1-re esne.

b) Tegyük föl, hogy az 1. a Hajt stratégiát ξ, a Kitér stratégiát $1-\xi$ valószínűséggel választja; a 2. pedig η, ill. $1-\eta$ valószínűséggel. Ekkor

$$u_1(\xi,\eta)=\xi\eta\cdot(-3)+\xi(1-\eta)\cdot 2+(1-\xi)\eta\cdot 0+(1-\xi)(1-\eta)\cdot 1=-4\xi\eta+\xi-\eta+1.$$

Deriválva ξ szerint: $u_{1,\xi} = -4\eta + 1$, $\eta^* = 1/4$-nél 0, tehát ott u_1-nek lokális és globális maximuma van. Szimmetria miatt $\xi^* = 1/4$-ben u_2-nek lokális és globális maximuma van.

c) Csak akkor van halál, ha mindkét játékos egymástól függetlenül H-t játszik, ennek valószínűsége $\xi^*\eta^* = 1/16$. Az életben maradásé tehát 15/16.

d) $u_1(H,K) = 2$, $u_1(K,H) = 0$ és $16u_1(\xi^*,\eta^*) = -3 + 3 \cdot 2 + 0 + 3 \cdot 3 \cdot 1$, azaz $u_1(\xi^*,\eta^*) = 12/16 = 3/4$.

4.2. feladat. Írjuk fel a kétszemélyes játék Nash-egyensúlyát új jelöléssel és szorozzuk be a másodikat −1-gyel. Ekkor egyesíthető a két egyenlőtlenség:

$$u(s_1, s_2^*) \le u(s_1^*, s_2^*) \le u(s_1^*, s_2) \quad \text{minden} \quad s_1 \in S_1\text{−re}, \quad s_2 \in S_2\text{−re}.$$

4.3. feladat. a) Cournot-egyensúly. Az 1. játékos nyeresége $\pi_1(q_1, q_2) = (1 - c_1 - q_1 - q_2)q_1$. Deriválva q_1 szerint és nullává téve a deriváltat: $\pi_{1,\,q_1}(q_1, q_2) = 1 - c_1 - q_2 - 2q_1 = 0$, rendezve: $2q_1 + q_2 = 1 - c_1$. Szimmetria miatt: $q_1 + 2q_2 = 1 - c_2$. Megoldva az egyenletrendszert:

$$q_1^* = \frac{1 - 2c_1 + c_2}{3} \qquad \text{és} \qquad q_2^* = \frac{1 - 2c_2 + c_1}{3}.$$

A feladat közgazdaságilag csak akkor értelmes, ha mindkét vállalat kibocsátása pozitív: $2c_1 - c_2 < 1$ és $2c_2 - c_1 < 1$. Szimmetrikus esetben $c_1 = c_2 < 1$.

b) A

$$q_1' = \frac{1 - c_1 - q_2}{2} \qquad \text{és} \qquad q_2' = \frac{1 - c_2 - q_1}{2}$$

legjobb-válasz függvény kontrakció, $\lambda > 1/2$-del.

6.1. feladat. a) Rajz.

b) Egyszerű számolással belátható, hogy $f(x^o) = x^o = \sqrt{\beta}$, és $t > 0$-ra $\sqrt{\beta} < x_{t+1} < x_t$, tehát az (x_t) sorozat csökkenő és alulról korlátos, és a határérték fixpont.

6.3. feladat. Egy homogén lineáris differenciaegyenlet alakja $x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2}$, az x_{-1} és x_{-2} kezdeti feltételek adottak. Az általános megoldás (kivételes kétszeres gyöktől eltekintve) $x_t = \xi_1\lambda_1^t + \xi_2\lambda_2^t$, ahol λ_k a $\lambda_k^2 = a_1\lambda_k + a_2$ gyöke, $k = 1, 2$. A ξ_1 és a ξ_2 kielégíti az $x_{-1} = \xi_1\lambda_1^{-1} + \xi_2\lambda_2^{-1}$ és $x_{-2} = \xi_1\lambda_1^{-2} + \xi_2\lambda_2^{-2}$ egyenletpárt. A korlátosság miatt $|\lambda_k| \le 1$. Ha az x_{-1} és x_{-2} kezdeti feltétel kicsit változik, akkor az ξ_1 és ξ_2 is csak kicsit változik, tehát a lineáris rendszer nem kaotikus.

6.4. feladat. a) Ha van 3-ciklus, akkor két pontja van az egyik ágon, egy pontja a másik ágon. Feltehető, hogy az első kettő kisebb 1/2, illetve nagyobb 1/2. Az első esetben $x_2 = 2x_1$, $x_3 = 2x_2$, és $x_1 = 2 - 2x_3$ adódik. Számolással: $x_1 = 1 - 2 \cdot 4x_1$, azaz $x_1 = 2/9$. Hasonlóan a másik esetben: $x_2 = 2x_1$, $x_3 = 2 - 2x_2 = 2 - 4x_1$, és $x_1 = 2 - 2x_3 = -2 + 8x_1$, azaz $x_1 = 2/7$ stb. Mindkét ciklus instabil, mert $|f^{3\prime}(\cdot)| \ge 2^3 = 8 > 1$.

b) Ha elég sokszor iteráljuk a leképezést, egyre meredekebb törött vonalakat kapunk, amelyek egészen közeli pontokat is szétszórnak.

9.1. feladat. a) $l_1 f_1 \nu^{-1} = 1$ azaz $\nu = l_1 f_1$.

b)–d)

9.2. táblázat. *A demográfiai átmenet sémája*

Időszak	Gyermekek	Dolgozók	Idősek száma	Teljes népesség	Teljes függőségi arány
b) $f_1 = 2$					
0	4	2	1	7	2,5
1	8	4	2	14	2,5
c) vagy $f_1' = 1$					
2	8	8	4	20	3
3	8	8	8	24	2
d) vagy $f_1'' = 1/2$					
2	4	8	4	16	1
3	2	4	8	14	2,5

9.2. feladat. a) Legyen $b_t = b_0\lambda^t$, amelyet behelyettesítve a születési egyenletbe, $b_0\lambda^t = f_1 b_0 \lambda^{t-1} + f_2 b_0 \lambda^{t-2}$ adódik. Egyszerűsítve és rendezve: $\lambda^2 - f_1\lambda - f_2$. Csak az egyik gyök pozitív: $\lambda_1 = (f_1 + \sqrt{f_1^2 + 4f_2})/2$.

b) $\lambda_1 = 1$ pontosan akkor valósul meg, ha $1 - f_1 - f_2 = 0$. A megfelelő kezdeti feltételek: $b_{-1} = b_{-2}$.

c) A gyökök és együtthatók összefüggése szerint ekkor a második sajátérték, $\lambda_2 = -f_2$ a $(-1, 0)$ szakaszra esik, tehát a rendszer stabil.

10.2. feladat. a)

$$z(D,R) = \tau w R - \frac{\tau w R}{\mathbf{E}D - R}(D - R) = \tau w \frac{\mathbf{E}D - D}{\mathbf{E}D - R} = b(R)(\mathbf{E}D - D).$$

b) Definíció szerint

$$\mathbf{E}z = f_1 b(R_1)(\mathbf{E}D - D_1) + f_2 b(R_2)(\mathbf{E}D - D_2).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$b(R_1) < b(R_2) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{E}D - D_2 < 0 < \mathbf{E}D - D_1,$$

ezért $\mathbf{E}z$ első tagját felülbecsüljük, ha $b(R_1)$ helyett $b(R_2)$-t írunk, és azt kiemeljük:

$$\mathbf{E}z < b(R_2)[f_1(\mathbf{E}D - D_1) + f_2(\mathbf{E}D - D_2)].$$

A várható érték definiciója szerint a [ ]-ben 0 áll, tehát $\mathbf{E}z < 0$.

12.1. feladat. (12.3) értelmében

$$B(2T) = \frac{R-1}{1 - R^{-2T}} D_0.$$

Mivel $1 - R^{-2T} = (1 - R^{-T})(1 + R^{-T})$, ezért

$$B(2T) = \frac{R-1}{(1 - R^{-T})(1 + R^{-T})} D_0 = \frac{B(T)}{1 + R^{-T}} > \frac{B(T)}{2}.$$