Konvex geometria
Matematikus szakos hallgatóknak

Gyakorló feladatok a záróvizsgához

1. Feladat. Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ egy tetszőleges halmaz. Legyen S *mag*ja azon $X \in S$ pontok halmaza, melyekre $[X, Y] \subseteq S$ minden $Y \in S$ esetén. Igazolja, hogy S magja konvex.

2. Feladat. Tekintsünk egy A $(n \times n)$-es mátrixot, mint az $\mathbb{E}^{n^2}$ tér egy tetszőleges pontját. Jelölje $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_+$ és $\mathcal{S}_{++}$ az $(n \times n)$-es szimmetrikus, pozitív definit, és pozitív szemidefinit mátrixok halmazát $\mathbb{E}^{n^2}$-ben. Igazolja, hogy ezek a halmazok konvexek.

3. Feladat. Legyen $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy invertálható lineáris transzformáció.

(a) Igazolja, hogy a $T(K) = \{Y : \exists X \in K, T(x) = y\}$ halmaz konvex minden $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex halmaz esetén.

(b) Igazolja, hogy a
$$P = \{Y \in \mathbb{E}^n : \langle y, x_i \rangle \leq \alpha_i, i = 1, 2, 3 \ldots, k\}$$
halmaz és $T(P)$ konvexek, és hogy léteznek olyan $w_1, w_2, \ldots, w_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok és $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R}$ számok, melyekre
$$T(P) = \{Y \in \mathbb{E}^n : \langle y, w_i \rangle \leq \beta_k, i = 1, 2, 2 \ldots, k\}.$$

4. Feladat. Mutassa meg, hogy

(a) A véges Helly-tétel nem igaz nem konvex halmazokra vagy ha azt tesszük fel, hogy bármely n elem metszete nem üres.

(b) van olyan végtelen sok zárt konvex halmazt tartalmazó család $\mathbb{E}^n$-ben, melyre igaz, hogy bármely $n+1$ elem metszete nem üres, de az összes elem metszete üres.

5. Feladat. Legyenek $\mathcal{F}$ konvex halmazok egy véges családja, és C egy konvex halmaz $\mathbb{E}^n$-ben. Bizonyítsa be, hogy ha $\mathcal{F}$ tetszőleges, legfeljebb $n+1$ eleméhez C egy eltoltja mindegyiket metszi/tartalmazza/mindegyikben benne van, akkor C egy alkalmas eltoltja $\mathcal{F}$ mindegyik elemét metszi/tartalmazza/mindegyik elemében benne van.

6. Feladat. Legyenek $L, L' \subset \mathbb{R}^n$ egymást csak a 0-ban metsző, k és $n-k$ dimenziós lineáris alterek, ahol $0 \leq k \leq n$.

a) Igazolja, hogy ekkor minden $P, Q \in \mathbb{E}^n$ esetén a $P + L$ és $Q + L'$ affin alterek metszete egyelemű.

b) Legyen $F = P + L$ rögzített. Definiáljuk a $\pi : \mathbb{E}^n \to F$ függvényt az alábbi módon: $f(Q) = Q'$, ha F és $Q + L'$ metszete $\{Q'\}$ (a π leképezés neve: L'-vel párhuzamos vetítés F-re). Igazolja, hogy tetszőleges $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex halmazra $\pi(K)$ konvex, és tetszőleges $K' \subseteq F$ konvex halmazra $\pi^{-1}(K')$ konvex.

7. Feladat. Legyenek K és L konvex síkidomok. Igazolja, hogy ekkor $\mathrm{perim}(K+L) = \mathrm{perim}(K) + \mathrm{perim}(L)$.

8. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $K \subseteq \mathbb{E}^n$ zárt, konvex és nem korlátos, akkor minden pontjából indul ki egy K-ban haladó zárt félegyenes.

9. Feladat. Legyen $K \subset \mathbb{E}^n$ egy zárt, konvex halmaz, és legyen F K egy lapja. Igazolja, hogy ha P F egy extremális pontja, akkor P Knak is extremális pontja.

10. Feladat. Legyen $A \subset \mathbb{E}^n$ tetszőleges. Igazolja, hogy P pontosan akkor extremális pontja $\mathrm{conv}(A)$-nak, ha $P \notin \mathrm{conv}(A \setminus \{P\}$.

11. Feladat. Igazolja, hogy a kompakt, konvex halmazok indikátorfüggvényei a $\mathcal{K}(\mathbb{E}^n)$ vektortér egy bázisát alkotják.

12. Feladat. Legyenek $K_1, K_2, K_3 \subset \mathbb{E}^n$ zárt konvex halmazok, melyek uniója konvex. Bizonyítsa be, hogy ha bármely két halmaz metszete nem üres, akkor mindhárom metszete sem üres.

13. Feladat. Igazolja, hogy létezik olyan kiértékelés $\mathcal{K}(\mathbb{E}^n)$-en, melynek értéke minden K kompakt, konvex halmaz indikátorfüggvényén K térfogata.

14. Feladat. Igazolja, hogy egy kompakt, konvex halmaz exponált pontjai egyben extremális pontjai is, és egy politóp extremális pontjai egyben exponált pontjai is.

15. Feladat. Igazolja, hogy minden n-dimenziós politópnak van hiperlapja. Igazolja, hogy minden $k = 0, 1, \ldots, n$ esetén minden n-dimenziós politópnak van k-dimenziós lapja.

16. Feladat. Legyen K egy tetszőleges n-dimenziós politóp, és $F \subset G$ olyan lapjai, melyekre $\dim F + 2 = \dim G$. Ekkor K-nak pontosan 2, ezektől különböző F_1, F_2 lapja van, melyekre $F \subset F_1, F_2 \subset G$.

17. Feladat. Legyen $P \subset \mathbb{E}^n$ egy n-dimenziós politóp. Legyen σ egy olyan hipersík, ami áthalad a politóp egy belső pontján, és nem tartalmazza egyik csúcsát sem. Legyen σ^+ valamelyik σ határolta nyílt féltér, és legyen f_i^+ P azon i-dimenziós lapjainak száma, melyeket σ^+ tartalmaz. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f_i^+ = 1.$$

18. Feladat. Legyen $P \subset \mathbb{E}^n$ egy n-dimenziós politóp, és legyen F egy k-dimenziós lapja. Jelölje $f_j(F, P)$ P azon j-dimenziós lapjait, melyek F-et tartalmazzák. Igazolja, hogy

$$\sum_{j=k}^{n-1} (-1)^j f_j(F, P) = (-1)^{n-1}.$$

19. Feladat. Igazolja, hogy tetszőleges $A \subseteq \mathbb{E}^n$ nemüres halmazra $((A^\circ)^\circ)^\circ = A^\circ$.

20. Feladat. Legyen $A \subseteq \mathbb{E}^n$ tetszőleges nemüres halmaz. Lássa be, hogy ekkor $(A^\circ)^\circ$ $\mathrm{conv}\,(A \cup \{O\})$ lezártja.

21. Feladat. Legyen $A \subseteq \mathbb{E}^n$ tetszőleges nemüres halmaz, melyre $A^\circ = A$. Mutassa meg, hogy ekkor A az O középpontú egységgömb.

22. Feladat. Legyen P egy n-dimenziós konvex politóp, és legyen $\lceil \frac{n}{2} \rceil < k < n+1$ egész. Igazolja, hogy ha P bármely k csúcsa a P egy valódi lapjának csúcshalmaza, akkor P egy szimplex.

23. Feladat. Igazoljuk, hogy a $K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}^n : -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \ldots, n\}$ kocka támaszfüggvénye $h((u_1, \ldots, u_n)) = \sum_{i=1}^n |u_i|, (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{E}^n$.

24. Feladat. Legyen K egy tetszőleges konvex test. Igazolja, hogy ekkor létezik $x \in \mathbb{R}^n$ és egy szimplex T, hogy

$$x + T \subseteq K \subseteq x - nT.$$

25. Feladat. Az előző feladat alapján igazolja, hogy két tetszőleges n-dimenziós konvex test Banach-Mazur távolsága legfeljebb n^4.