NEMLINEÁRIS PROGRAMOZÁS (BMETE93AM21) ZÁRÓVIZSGA

KÉSZÍTETTE: BURAI PÁL, 2023.03.07.

Tematika

Optimalitási feltételek: Mátrixok osztályozása. Stacionárius pontok osztályozása. Elsőrendű feltételek. Másodrendű feltételek. Koercivitás. Globális optimalitási kritérium. Kvadratikus függvények.

Legkisebb négyzetek módszere és alkalmazásai: Legkisebb négyzetek módszere lineáris esetben. Adatillesztés, zajszűrés, regularizált legkisebb négyzetek módszere. Nemlineáris eset. Körillesztés.

Gradiens módszer: Csökkenési irány, legmeredekebb csökkenési irány, gradiens módszer. Módszerek a lépéshossz kiválasztására. Kvadratikus függvények. Kántorovics egyenlőtlenség. Kondíciószám. Konvergenciasebesség. Skálázott gradiens módszer. Fermat-Weber problémakör.

Newton módszer: Newton módszer, konvergenciasebesség, csillapított Newton módszer.

Konvexitás, konvex függvények: Konvex halmazok, konvex burok, kúp, extremálisok. Konvex függvények, karakterizálásuk, differenciálható konvex függvények, konvex függvények szélsőértékei.

Konvex optimalizálási problémák: Konvex optimalizálási problémák szélsőértékei, konvex kvadratikus függvényekre vonatkozó feladatok. Portfólió optimalizálás.

Optimalitási feltételek feltételes problémákra: KKT feltételek speciális problémákra. Fritz-John feltétel. KKT feltételek általános esetben. Dualitáselmélet.

Mintafeladatok

1.) Legyen $f(x,y) = 2x - 3y$. Bizonyítsa be, hogy f felveszi a globális minimumát az

$$S = \left\{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 5y^2 \leq 1 \ \right\}$$

halmazon! Keresse meg a globális minimumhelyeket!

2.) Bizonyítsa be, hogy pozitív szemidefinit mátrixok összege és nemnegatív konstansszorosa is pozitív szemidefinit!

3.) Legyenek $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ szimmetrikus mátrixok. Bizonyítsa be, hogy ekkora következő két állítás ekvivalens:
- A és B pozitív szemidefinit.
- $$\begin{bmatrix} A & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & B \end{bmatrix}$$
  pozitív szemidefinit.

4.) Vizsgálja meg a következő mátrixok definitségét!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5.) Vizsgálja meg a következő függvények koerszivitását!

$$f(x,y) = x^4+y^4, \quad g(x,y) = e^x+e^y-x^{200}-y^{200}, \quad h(x,y) = x^2-2xy+y^4.$$

6.) Adjon meg olyan $\mathbb{R}^2$-n értelmezett valós értékű függvényt, amelynek határértéke az $x = y$ és az $x = -y$ egyenesek mentén plusz végtelen, de nem koerszív.

7.) Keresse meg az alábbi függvények stacionárius pontjait, majd osztályozza őket (nyeregpont, lokális minimum, szigorú lokális minimum, stb.)!

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (4x^4 - y)^2, \\ g(x,y) &= 2y^3 - 6y^2 + 3x^2y, \\ h(x,y) &= (y-2y)^4 + 64xy, \\ i(x,y) &= x^2 + 4xy + y^2 + x - y, \\ j(x_1,x_2) &= x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - x_2, \\ k(x,y,z) &= x^4 - 2x^2 + y^2 + 2yz + 2z^2. \end{aligned}$$

8.) Az előző feladat függvényeinek stacionárius pontjaiban számítsa ki a második derivált mátrixok kondíciószámát!

9.) Definiálja a legmeredekebb csökkenési irányt, majd mondja ki a rá vonatkozó tételt!

10.) Számítsa ki a legmeredekebb csökkenési irányt az alábbi függvények esetén a megadott pontban!

- $$g(x,y) = 2y^3 - 6y^2 + 3x^2y, \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
- $$k(x,y,z) = x^4 - 2x^2 + y^2 + 2yz + 2z^2, \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

11.) Legyen $f(x) = x^T Ax$, ahol
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}.$$
Adjon becslést $f(x_k)$ értékére $f(x_0)$ segítségével, ha x_k a gradiens módszer által generált sorozat k. eleme egzakt lépésközzel és
$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

12.) Adja meg az előző feladat feltételei mellett x_1-et.

13.) Oldjuk meg az előző két feladatot, ha A a 2×2-es Hilbert mátrix!

14.) Adjon példát olyan folytonos függvényre, amelyik nem Lipschitz! Adjon példát 1-Lipschitz függvényre!

15.) Írja fel a 6.) feladat függvényeire formálisan a Newton-módszer iterációs képletét!

16.) Írja fel tetszőleges kvadratikus függvény esetén a Newton-módszer iterációs képletét!

17.) Bizonyítsa be, hogy $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pontosan akkor konvex, ha a
$$\varphi_{x,d}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi_{x,d}(t) := f(x + td)$$
valós függvény konvex minden $x, d \in \mathbb{R}^n$ esetén!

18.) Bizonyítsa be, hogy a következő függvények konvexek a megadott halmazon!
$$\begin{aligned} f(x) &= |x|^4, & \mathbb{R}^n&, \\ g(x) &= \sqrt{x_1x_2} + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3, & \mathbb{R}^3_{++}&, \\ h(x) &= \sqrt{x^TQx + 1}, & \mathbb{R}^n&, \text{ ahol } Q \succeq 0. \end{aligned}$$

19.) Írja fel, majd oldja meg a KKT rendszert a következő optimalizálási problémák esetén! Keresse meg a KKT pontokat és az optimális megoldást, amennyiben lehetséges!
$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 \\ \text{f.h. } & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & -x_1x_2x_3 \\ \text{f.h.}\ & x_1 + +3x_2 + 6x_3 \leq 48 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{f.h.}\ & x_1 + +2x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & x_3 \leq 1. \end{aligned}$$

20.) Írja fel az előző feladatok duálisát!
21.) Mondja ki a Fritz-John feltételt!
22.) Fogalmazza meg a Slater regularitási feltételt, adjon példát reguláris, illetve, nem reguláris feladatra!