

Numerikus analízis (BMETE92AM43)

Záróvizsga mintafeladatok

2025

1. Írjuk fel az $M(2, 2, -2, 1)$ halmaz elemeit! Adjuk meg ε_0 , $\mathcal{M}_\infty$, ε_1 értékeit! Mi lesz ebben a számhalmazban $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, illetve 2 értéke?
2. Mondja ki a fixpont-tételt!
3. Mondja ki és bizonyítsa be az interpolációs polinomok hibabecslésére vonatkozó állítást!
4. Mutassa meg, hogy az interpolációs feladatnak mindig létezik egyértelmű megoldása!
5. Interpolációs eljárás-e a spline, illetve a legkisebb négyzetek módszere?
6. Hasonlítsa össze a Lagrange-féle interpolációt a trigonometrikus interpolációval!
7. Illesszünk Hermite-féle interpolációs polinomot az alábbi értékekre:

$$f(1) = 0, f(2) = 1, f'(2) = 3, f''(2) = -2, f(3) = 1.$$

8. Írjuk fel az az $S_2(x)$ másodfokú splinet, amely illeszkedik a $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(2, -1)$ pontokra és $S'(2) = -2$.
9. Mit nevezünk a numerikus deriválás során a lépéstávolság dilemmájának?
10. Mit approximál az

$$\frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h}$$

kifejezés (ahol $f \in C^3$)? Határozzuk meg a közelítés konvergencia-rendjét!

11. Határozza meg az egyszerű érintő formula pontossági rendjét!
12. Mondja ki és bizonyítsa be az összetett trapéz-formula konvergenciájára vonatkozó állítást!
13. Definiálja a numerikus integráláshoz alkalmazott összetett érintőformulát! Határozza meg és bizonyítsa be a konvergencia-rendjét! Hasonlítsa össze az összetett trapéz formulával!
14. Tekintsük az alábbi integrált:

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 1} dx.$$

Számítsuk ki az integrál értékét a trapézmódszer, az érintőformula és a Simpson szabály segítségével is!

15. Írja fel az $f(x) = 0$ nemlineáris egyenlet Newton-féle megoldási módszerének képletét! Mi mondható el a konvergencia rendjéről, illetve a kezdő iterációs lépés megválasztásáról?
16. Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x) = x^5 - x.$$

Meg szeretnénk keresni azokat a pontokat, ahol ezen függvény értéke 2. Alkalmas F függvény választásával írjuk át a fenti problémát fixpont-iterációs alakba! Lássuk be, hogy ezen iteráció konvergálni fog az $[1, 2]$ intervallumon!

17. Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}5x^2 - y^2 &= 0, \\ y - 0.25(\sin(x) + \cos(y)) &= 0.\end{aligned}$$

Írjuk fel ezen egyenletrendszerre alkalmazott Newton módszer első lépését, ahol legyen $(x_0, y_0) = (0.25, 0.25)$.

18. Tekintsük az alábbi mátrixot:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 17 & 13/2 \\ 1 & 13/2 & 23/2 \end{bmatrix}$$

Lássuk be, hogy létezik LU-, illetve Cholesky-felbontása, és számítsuk is ki az utóbbit!

19. Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 10^{-5}x + y &= 1, \\ x + y &= 2. \end{cases}$$

4 tizedes hosszú mantisszával számolva oldjuk meg a rendszert főelem-kiválasztással és anélkül is! Mit tapasztalunk?

20. Írja fel az $Ax = b$ lineáris algebrai egyenletrendszert megoldó stacionárius iteráció általános alakját! Mondja ki és bizonyítsa be a konvergenciáról szóló tételt!

21. Konvergens-e a Gauss-Seidel iteráció az M-mátrixos lineáris algebrai egyenletrendszerekre? Igazolja állítását!

22. Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Melyik tanult iterációs módszerrel oldható meg ez a rendszer? Írjuk fel a JOR iteráció egy lépését a rendszerre! Mit mondhatunk: mely ε érték esetén lesz a leggyorsabb a konvergencia?

23. Mondja ki és bizonyítsa be az explicit Euler módszer konvergenciájáról szóló tételt!

24. Hasonlítsa össze a közönséges differenciálegyenleteket megoldó explicit és implicit Euler módszereket, illetve a trapéz szabályt!

25. Tekintsük az alábbi differenciál-egyenletet:

$$\begin{cases} y'(t) &= \arctg(y(t)), \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Írjuk fel az erre alkalmazott explicit, illetve implicit Euler módszer első lépését! Hogyan lehetne kezelni az implicit esetben fellépő problémát?