Operációkutatás (BMETE93AM19) záróvizsga minta feladatsor

2018. március 13.

Készítette: Illés Tibor

Feladatok

---

1. Határozz meg a következő mátrix rangját λ-tól függően!

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ \lambda & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Válaszát indokolja; számítási lépéseit röviden, tömören magyarázza el.

2. Oldja meg λ-tól függűen a következő lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{array}{lllll} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & =1 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +4x_4 & =2 \\ x_1 & +7x_2 & -4x_3 & +11x_4 & =\lambda \end{array}$$

Mely λ értékekre lesz megoldása a lineáris egyenletrendszernek és mely értékekre nem lesz megoldás? Van-e olyan érték, amelyre egyértelmű megoldása van a lineáris egyenletrendszernek? Válaszát indokolja.

3. Három bánya (B_1, B_2, B_3) rendre 50, 45, 35 megatonna rézércet termel naponta. 4 kohászatot (K_1, K_2, K_3, K_4) látnak el, melyek igénye 40, 35, 30, 25 megatonna/nap. A fajlagos szállítási költségeket az alábbi táblázat mutatja:

	K_1	K_2	K_3	K_4
B_1	5	3	5	8
B_2	6	3	5	1
B_3	3	8	2	4

Írja fel a feladat modelljét, és adjon meg egy induló megoldást!

4. Tekintsük a következő primál megengedett szállítási táblát:

3 5	4	5 3	3
5	4 2	6 4	3
5 2	6	7	4 3

Optimális bázis megoldást adtunk-e meg? Ha nem, akkor indokolja meg miért nem optimális a megoldás és végezzen el egy javító lépést! (Hiányoznak adatok a megadott tábla alapján? Ha igen, egyértelműen lehet pótolni azokat? Válaszát indokolja.)

5. Írja fel a szállítási feladat primál-duál feladatpárját, és mondja ki a gyenge dualitástételt! Adja meg a szállítási feladat optimalitási kritériumait. (A gyenge dualitás tételt nem kell bizonyítani, de ha tudja a bizonyítást és jól leírja, akkor plusz pontokat kaphat.)

6. Mondja ki Rouché-Kronceker-Capelli- és a Farkas-lemmát! Hasonlítsa össze a két állítást: magyarázza el a hasonlóságokat és különbségeket. (A lemmákat nem kell bizonyítani, de ha tudja a bizonyítást és jól leírja, akkor plusz pontokat kaphat.)

7. Írja fel a lineáris programozás primál-duál feladatpárját, mondja ki a gyenge- és erős dualitás tételeket. Adja meg az optimalitási kritériumokat. (A tételeket nem kell bizonyítania, de ha tudja a bizonyítást és jól leírja, akkor plusz pontokat kaphat.)

8. A következő szimplex tábla egy maximalizálási feladat megoldása során állt elő. Mit mondhatunk róla? Megállási tábla esetén ezt bizonyítsa, ha nem, akkor végezzen el egy pivotálást!

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	3	5	1	0	-1	2	0	3
	-2	3	0	0	0	1	1	1
	1	0	0	1	-2	-1	0	0
	-2	1	0	0	3	-1	0	-31

Válaszát indokolja; számítási lépéseit röviden, tömören magyarázza el.

9. A következő szimplex tábla egy minimalizálási feladat megoldása során állt elő. Válasszon pivot pozíciót a minimum index szabállyal, majd végezze el a pivotálást!

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	6	1	0	-2	3	1	4
x_1	1	3	0	0	0	-1	-3	2
x_4	0	1	0	1	3	2	2	4
	0	-3	0	0	-2	1	3	-17

Válaszát indokolja; számítási lépéseit röviden, tömören magyarázza el.

10. A következő szimplex tábla egy minimalizálási feladat megoldása során állt elő. Mit mondhatunk róla? Megállási tábla esetén ezt bizonyítsa, ha nem, akkor végezzen el egy pivotálást!

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	3	-5	1	0	-1	2	0	3
	-3	3	0	0	0	3	1	4
	4	0	0	1	2	-1	0	1
	2	1	0	0	3	0	0	-11

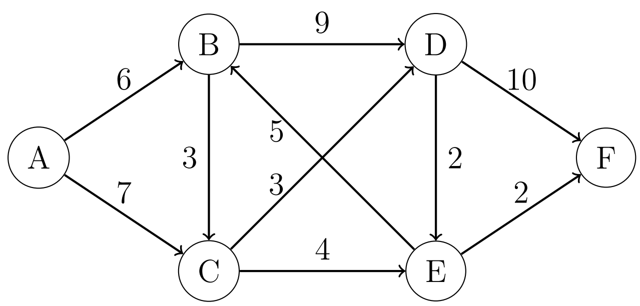
Válaszát indokolja; számítási lépéseit röviden, tömören magyarázza el.

11. A következő szimplex tábla egy maximalizálási feladat megoldása során állt elő. Válasszon pivot pozíciót a minimum index szabállyal, majd végezze el a pivotálást!

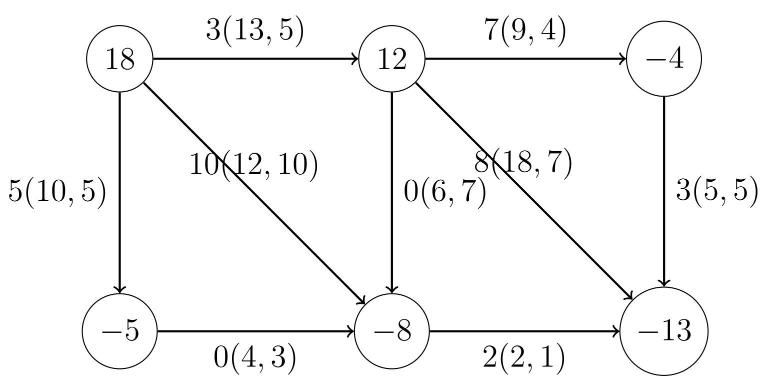
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	0	1	4	0	-4	2	0	1
x_7	-1	0	1	0	3	1	1	0
x_4	4	0	2	1	2	-3	0	0
	-1	0	2	0	-3	3	0	-29

Válaszát indokolja; számítási lépéseit röviden, tömören magyarázza el.

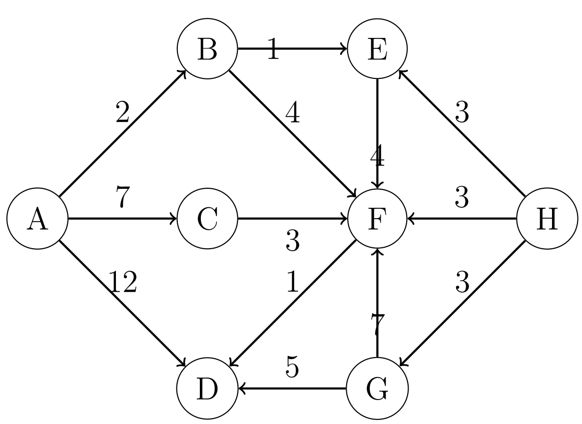
12. Tekintsük a következő $A \to F$ maximális folyam feladatot! Az éleken található számok felső korlátok, az alsó korlát minden élen 0. Oldja meg a feladatot szimplex algoritmussal, lépéseit indokolja! Adjon bizonyítékot a kapott megoldás maximalitására!



13. Tekintsük a következő minimális költségű folyam feladatot! A csúcsokon a csúcs többlete, az éleken rendre a jelenlegi folyamérték, kapacitás és költség látható. Minden él alsó korlátja 0. Bázismegoldás-e a jelenlegi folyam? Ha nem, akkor tegyük azzá, majd oldjuk meg a feladatot!



14. Határozzuk meg az A csúcsból a többi csúcsba vezető legrövidebb irányított utat a Dijkstra algoritmus segítségével!



15. Tekintsük a maximális folyam feladatot nulla alsó korláttal. Ismertesse a Ford–Fulkerson algoritmust! Mondja maximális folyam–minimális vágás tételt! (A maximális folyam–minimális

vágás tételt nem kell bizonyítani, de ha tudja a bizonyítást és jól leírja, akkor plusz pontokat kaphat.)

16. Fogalmazza meg a minimális költségű hálózati folyam feladatot lineáris programozási feladatként, majd írja fel a feladat duálisát! Mondja ki a feladatpárra vonatkozó gyenge dualitást, és adja meg a feladatpárhoz tartozó optimalitási kritériumot! (A gyenge dualitás tételt nem kell bizonyítani, de ha tudja a bizonyítást és jól leírja, akkor plusz pontokat kaphat.)

17. Adja meg a hátizsák feladatot és írja fel a korlátozás és szétválasztás algoritmust a hátizsák feladatra! Mit mondhatunk az algoritmus hatékonyságáról?

18. TV csatornánk legértékesebb reklámszpotjába, az Esmeralda 4 perces szünetébe szeretnénk a lehető legdrágább reklámokat kiválasztani. A következő ajánlatokat kaptuk:

Reklám	A	B	C	D
Idő (negyed perc)	9	5	3	5
Ár (millió forint)	45	30	45	10

Írja fel a probléma matematikai modelljét, és végezzen el a korlátozás és szétválasztás módszerével legalább 4 iterációt! Mit tud elmondani a megoldás jelenlegi állapotáról?

19. Írja fel a lineáris egészértékű programozási feladat Gomory-vágásokkal történő megoldási algoritmusát! Törekedjen a tömör és precíz fogalmazásra, használjon pszeudokódot/folyamatábrát! Mit mondhatunk az algoritmus hatékonyságáról?

20. Tekintsük a következő egészértékű, minimalizálási lineáris programozási feladatokból származó pivottáblákat. Készítsünk belőlük Gomory-vágást (ha lehet), és oldjuk meg az így kapott feladat folytonos relaxáltját!

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	3	−5.5	1	0	−1.2	2	0	5
x_7	−0.3	3.2	0	0	0	0.75	1	1.5
x_4	4	0	0	1	2	−1.5	0	1
	2.1	1.8	0	0	3	−2.25	0	−11.8

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	6	1	0	3	1.8	4
x_1	1	3.2	0	0	−1.9	−3.6	2.2
x_4	0	1.1	0	1	2.1	2.1	4
	0	3.7	0	0	1	2.4	−17.9

21. Fogalmazza meg a zéróösszegű mátrixjáték feladatot. Definiálja a tiszta és kevertstratégia, valamint a nyeregpont fogalmát. Mondja ki a Neumann-tételt! (A Neumann-tételt nem kell bizonyítani, de ha tudja a bizonyítást és jól leírja, akkor plusz pontokat kaphat.)

22. A „Nemzeti Blottó Pártnak” 4 aktivistája van Felső-Karancsalja 17. számú választókörzetében, míg a „Független Játékelmélészek Szövetségének” csak 2. A választókörzetben 2 háztartás található, az elsőben 2, a másodikban 1 szavazóval. Az aktivisták nagyon hatásosak, így a háztartásban levő összes szavazó arra fog szavazni, aki több aktivistát küld oda (holtverseny esetén egyikre sem).
Írja fel a probléma játékelméleti modelljét, határozza meg a játék kifizetési mátrixát! Keressen optimális tiszta, vagy ha olyan nem létezik, kevert stratégiát!