OPERÁCIÓKUTATÁS (BMETE93AM19) ZÁRÓVIZSGA TEMATIKA ÉS FELADATOK

KÉSZÍTETTE: BURAI PÁL, 2023.03.07.

1. Tematika

Konvexitás: Konvex halmazok, konvex halmazok összege, metszete, konstansszorosa. Konvex burok, kúp, lineáris varietás, hipersík. Hipersíkok jellemzése. Félterek, konvex politóp, konvex poliéder. Elválasztási tétel, tartó hipersík. Extremálisok, zárt, konvex halmazok extremálisaira vonatkozó tétel, konvex poliéderek extremálisaira vonatkozó tétel.

Alapok: Általános alakú lineáris programozási feladat. Standard feladat. Standard alakra hozás. Megoldás, megengedett megoldás, bázismegoldás, degenerált bázismegoldás, megengedett bázismegoldás, optimális megoldás, optimális bázismegoldás. Lineáris programozás alaptétele. Tétel az extremálisok és a bázismegoldások kapcsolatáról és ennek következményei.

Szimplex módszer: Kanonikus alakú feladat. Pivotálás. Betérő és kitérő bázisváltozó meghatározása. Optimalitási feltétel. Szimplex tábla. Szimplex algoritmus. Degeneráltság, ciklizálás elkerülése. Kétfázisú szimplex módszer.

Dualitáselmélet: Primál-duál feladatpár. Gyenge dualitási tétel, erős dualitási tétel és következményei. Farkas lemma. Komplementaritás, érzékenységvizsgálat. Primál-duál algoritmus.

Szállítási- és hozzárendelési feladat: Hozzárendelési feladat. Kiegyensúlyozott feladat megoldhatósága. Induló báziskeresési módszerek. Szimplex módszer a szállítási feladatra. Kiegyensúlyozatlan feladatok megoldása. Hozzárendelési feladat. Magyar módszer.

Egészértékű programozás. Gomory metszősíkok módszere.

Játékelmélet. Kétszemélyes mátrixjátékok. Kevert bővítés. Optimális stratégiák. Minimax tétel.

2. Mintafeladatsor

1.) Adjon meg két konvex, nem üres, diszjunkt halmazt $\mathbb{R}^2$-ben, amelyek nem szigorúan elválaszthatóak! Adja meg az elválasztó hipersíkot!
2.) Adjon példát olyan halmazra, amelynek nem véges sok extremális pontja van!
3.) Egy üzem kis és közepes televízió készülékeket gyárt. Minden kis TV-n 4 pénzegység a nyereség, míg a közepeseken 6 pénzegység. Egy kis TV előállításához egyes részlegekben rendre 3, 1, 1 óra szükséges. Ugyanezek az értékek közepes TV esetében rendre 2, 3, 1 óra. Az elsõ részleg kapacitása legfeljebb napi 30, a második részleg kapacitása legfeljebb napi 23, a harmadik részleg kapacitása legfeljebb napi 11 óra. Hány kis és közepes TV gyártása maximalizálja a nyereséget?
4.) Számítsa ki az alábbi két párhuzamos hipersík távolságát

$$H_1 = \{\ x \in \mathbb{R}^3 \mid a^T x = 1\ \}, \quad H_2 = \{\ x \in \mathbb{R}^3 \mid a^T x = 4\ \},$$

ahol

$$a^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Adjon meg egy pontot H_1-en, adjon meg két olyan pontot, amelyek H_2 különböző oldalán helyezkednek el!
5.) Oldja meg a következő feladatot szimplex módszerrel!

$$\begin{array}{llllll}
\min & 2x_1+ & 3x_2 & & & \\
\text{f.h.} & & & & & \\
 & 2x_1+ & x_2- & x_3 & & = 4 \\
 & -x_1+ & x_2+ & & x_4 & = 1 \\
 & & x_i \geq 0 & i = 1,2,3,4 & &
\end{array}$$

6.) Hozza standard alakúra az alábbi feladatot!

$$\begin{array}{lllll}
\max & -x_1+ & 3x_2- & 3x_3 & \\
\text{f.h.} & & & & \\
 & -x_1+ & x_2+ & x_3 & \leq 4 \\
 & x_1- & 4x_2+ & 2x_3 & \geq 5 \\
 & 2x_1+ & 2x_2+ & x_3 & = 4 \\
 & x_1 \geq 1, & x_2 \in \mathbb{R}, & x_3 \geq 0 &
\end{array}$$

7.) Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$. Azt mondjuk, hogy $x \preceq y$ (x lexikografikusan kisebb vagy egyenlő, mint y), ha $y - x$ első nullától különböző koordinátája pozitív. Adjon meg $\mathbb{R}^4$-ben egy lexikografikusan szigorúan monoton csökkenő alulról lexikografikusan korlátos sorozatot.
8.) Adjon meg $\mathbb{R}^3$-ban két olyan diszjunkt konvex halmazt, amelyek nem szigorúan elválaszthatók. Adja meg egy elválasztó hipersík egyenletét.
9.) Egy 5 étteremből álló étteremlánc 4 kertészettől szerzi be az ételek elkészítéséhez szükséges zöldségeket. A kertészetek kapacitását (100

kg-ban), az egyes éttermek igényeit (100 kg-ban) és a szállítási egységköltségeket az alábbi táblázat mutatja:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	
K_1	12	20	3	8	15	80
K_2	5	10	12	10	14	90
K_3	13	6	15	12	4	70
K_4	11	8	12	6	13	90
	100	50	90	30	60	

A cél a lehető legolcsóbb szállítási terv meghatározása az összes igény kielégítésével.

(a) Írja fel a feladat modelljét, és adjon meg egy induló bázismegoldást a legkisebb költség heurisztikával!
(b) Vizsgálja meg, hogy ez a megoldás optimális bázismegoldás-e! Válaszát indokolja!
(c) Amennyiben a kapott megoldás nem optimális, végezzen el egy javító lépést!

10.) Egy áruházlánc 4 raktárból szolgálja ki 5 boltját. A raktárak kapacitását, a boltok igényét és a szállítási egységköltségeket az alábbi táblázat tartalmazza:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
R_1	8	6	3	8	10	80
R_2	5	10	8	6	4	80
R_3	11	5	7	2	4	50
R_4	6	8	10	9	5	100
	100	70	80	50	60	

Az áruházlánc szeretné meghatározni az optimális szállítási stratégiát.

(a) Írja fel a feladat modelljét, és adjon meg egy induló bázismegoldást az északnyugati sarok módszerrel!
(b) Vizsgálja meg, hogy ez a megoldás optimális bázismegoldás-e! Válaszát indokolja!
(c) Amennyiben a kapott megoldás nem optimális, végezzen el egy javító lépést!

11.) Írja fel a következő feladat matematikai modelljét:
Egy gyárban ötféle terméket (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5) gyártanak. Ezek gyártásához háromféle erőforrást (E_1, E_2, E_3) használnak fel. Az egyes termékek erőforrás-szükségletét (kg-ban) és az egyes termékek eladási árát (ezer Ft/darab) a következő táblázat mutatja:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
E_1	8	12	5	6	7
E_2	2	0	12	7	3
E_3	14	7	8	15	10
Eladási ár/db	80	70	140	90	110

Az erőforrásokból kapacitása rendre 2000, 2500, 4500 kilogramm. Hány darabot gyártson a gyár az egyes termékekből, ha a következő feltételeknek is teljesülnie kell:

- Az E_1 erőforrás kapacitását teljesen ki kell használni.
- T_4-ből legalább kétszer annyit kell gyártani, mint T_1-ből és T_3-ból összesen.

12.) Írja fel a következő feladat matematikai modelljét!
Egy üzemben négyféle alkatrész (A_1, A_2, A_3, A_4) felhasználásával (összeszerelésével) négyféle különböző terméket (T_1, T_2, T_3, T_4) állítanak elő. Az egyes termékek alkatrészigénye a következő táblázatban látható:

	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	5	0	1	2
A_2	0	2	8	3
A_3	2	3	6	0
A_4	0	1	0	6

Az alkatrészekből rendelkezésre álló mennyiség rendre 1500, 850, 1100 és 700 darab. Követelmény továbbá, hogy az összes A_4 típusú alkatrészt fel kell használni és a T_2 termékből legalább háromszor annyit kell készíteni, mint a T_4-ből. Mennyit készítsenek az egyes termékekből, ha az a cél, hogy a fel nem használt alkatrészek száma minimális legyen?

13.) A következő szimplex tábla egy maximalizálási (normál) feladat megoldása során állt elő. Mit mondhatunk róla? Olvassa le az aktuális bázismegoldást! Megállási tábla esetén ezt bizonyítsa, ha nem, akkor végezzen el egy pivotálást!

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	-1	0	0	1	-1	0	4
1	0	-1	1	0	1	0	6
3	1	-2	0	0	3	1	26
-3	2	7	0	0	-4	0	-24

Válaszát indokolja; számítási lépéseit röviden, tömören magyarázza el.

14.) A következő szimplex tábla egy maximalizálási (normál) feladat megoldása során állt elő. Mit mondhatunk róla? Olvassa le az aktuális bázismegoldást! Megállási tábla esetén ezt bizonyítsa, ha nem, akkor végezzen el egy pivotálást!

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
0	-2	-1	0	1	1	-2	0	0	2
1	1	1	0	0	0	1	0	0	4
0	1	1	1	0	0	0	1	0	7
0	1	1	0	1	0	0	1	1	13
0	-7	-8	0	1	0	-9	-3	0	-57

Válaszát indokolja; számítási lépéseit röviden, tömören magyarázza el.

15.) A kétfázisú szimplex módszer első fázisával mutassa meg, hogy az alábbi lineáris programozási feladatnak nincs megengedett megoldása:

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 &\geq 10 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

16.) Fogalmazza meg a lineáris programozás alaptételét! Igaz-e, hogy tetszőleges lineáris programozási feladat optimális megoldása szükségképpen a feladatnak megfelelő konvex politóp egy extremálisa?

17.) Adjon meg egy olyan lineáris programozási feladatot, amelynek nincs megengedett megoldása!

18.) Fogalmazza meg az erős dualitási tételt! Mit mondhatunk a duális feladatról, ha a primál feladat célfüggvénye nem korlátos a megengedett megoldások halmazán?

19.) Állítsa elő az alábbi lineáris programozási feladat egy megengedett megoldását a kétfázisú szimplex algoritmus első fázisának segítségével! Írja fel a 2. fázis feladat kezdő szimplex tábláját! Optimális-e az itt szereplő bázismegoldás? Válaszát indokolja!

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 + 3x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_3 &\leq -10 \\ x_2 + x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

20.) Adja meg az alábbi feladatok duálisát!

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &\geq 10 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &\geq 10 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

21.) Tegyük fel, hogy mind a duál, mind a primál feladatnak van megengedett megoldása. Továbbá, a primál feladat két megengedett megoldásán a célfüggvény értéke 2, illetve -1, a duál feladat célfüggvénye pedig $3x_1 + 2x_2$. Melyik feladat megengedett megoldása lehet az $x^T = [0, \frac{1}{2}]$ vektor? Válaszát indokolja! Lehet-e az $x^T = [1, 1]$ vektor a duál feladat megengedett megoldása, ha tudjuk, hogy az maximalizálási feladat?

22.) Írja fel a kő-papír-olló játék kevert bővítéséhez tartozó primál-duál feladatpárt és hajtson végre egy-egy lépést a feladatokon szimplex, illetve, duál szimplex algoritmussal!

23.) Gomory vágás levezetése, adott feladaton való végrehajtása!