Variációszámítás és optimális irányítás (BMETE93AM22) Záróvizsga Minta Feladatsor

1. Vezesse le az Euler-Lagrange egyenletet a Variációszámítás Alapproblémája esetén!

2. Jelentse ki és bizonyítsa be a variációszámítás alaplemmáját!

3. Írja fel Netwon törvényét mint egy Euler-Lagrange egyenlet! Igazolja az energiamegmaradás elvét!

4. Jelentse ki a Pontrjagin-féle maximum elvet a rögzített végpontok esetén!

5. Legyen
$$J(y) = \int_0^1 \left[(y(x))^2 + 2xy(x)y'(x)\right]\, dx,$$
igazolja, hogy $J(y)$ értéke változatlan bármely $y \in C^1([0,1])$, $y(0) = y_0$, $y(1) = y_1$ esetén!

6. Legyen
$$J(y) = \int_0^1 \left[(y'(x))^2 + 2y(x)y'(x) - 17(y(x))^2\right]\, dx,$$
adja meg és oldja meg az Euler-Lagrange egyenletet az $y(0) = 0$ illetve $y(1) = 1$ feltételek mellett!

7. Legyen
$$J(y) = \int_0^1 y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx,$$

adja meg és oldja meg az Euler-Lagrange egyenletet az $y(0) = 0$ illetve $y(1) = 1$ illetve

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx = C_0$$

feltételek mellett!

8. Legyen

$$J(y) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{y(x)}\, dx,$$

adja meg és oldja meg az Euler-Lagrange egyenletet az $y(0) = 0$ illetve $y(1) = 1$ feltételek mellett!

9. Oldja meg az alábbi probémát:

$$\inf_{y \in \mathcal{A}} \int_a^b (|y'(x)|^2 - |y(x)|^2)\, dx,$$

ahol

$$\mathcal{A} = \{y \in C^1([0,1]),\ y(a) = y_0,\ y(b) = y_b\}.$$

Mi történik ha $b - a = n\pi$?

10. Tekintsük az alábbi probémát:

$$\inf_{y \in \mathcal{A}} \int_0^1 x\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx,$$

ahol

$$\mathcal{A} = \{y \in C^1([0,1]),\ y(0) = 1,\ y(1) = 0\}.$$

(a) Igazolja, hogy $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx \geq \frac{1}{2}$ minden $y \in C^1([0,1])$ esetén!

(b) Értékelje ki az integrált az $y_n(x) = (1 - x)^n$ függvénycsalád elemeiben és igazolja, hogy az infimum egyenlő $\frac{1}{2}$-vel.

(c) Megvalósul-e ez az infimum valamely $y \in \mathcal{A}$ esetén?

11. Legyen

$$J(y) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2(y'(x))^2 - \frac{1}{8}(y(x))^2\right] dx,$$

adja meg és oldja meg az Euler-Lagrange egyenletet az $y(0) = 0$ illetve $x = e$-ben változó végpont feltételek mellett!

12. Legyen

$$J(y) = \int_0^1 (y'(x))^2\, dx,$$

adja meg és oldja meg az Euler-Lagrange egyenletet az $y(0) = 0$ illetve $x = 1$-ben változó végpont feltételek mellett!

13. Tekintsük az alábbi problémát:

$$\inf_{w \in \mathcal{A}} \int_0^1 \left[(\cos(w(x)))^2 (w'(x))^2 - \sin(w(x)) \right] dx,$$

ahol

$$\mathcal{A} = \{w \in C^1([0,1]),\ w(0) = 0,\ w(1) = \pi/2\}.$$

Keressen egy olyan $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvényt, amely esetén az

$$y(x) := f(w(x))$$

helyettesítés segítségével átírható a probléma egy egyszerűbb alakba. Oldja meg az így kapott (y szerinti) optimalizálási problémát!

14. Adott $x \geq 0$ és $N \in \mathbb{N}^*$ esetén legyen

$$V_N(x) := \sup \left\{ \prod_{i=1}^{N-1} x_i, \quad x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{N-1} x_i = x \right\}.$$

Számolja ki V_1-et, majd rekurzívan V_n-et! Vonja le következtetésként a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget!

15. Legyen $x \geq 0$, oldja meg a dinamikus programozás módszerével az alábbi problémát:

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{N} x_i^2, \quad x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = x \right\}.$$

16. Legyen $T > 0$ és $x \in \mathbb{R}$ adott. Tekintsük az alábbi problémát:

$$\inf \left\{ \int_0^T e^{-t} (u(t))^2\, dt + x(T), \quad x(0) = x,\ x'(t) = x(t) + u(t) \right\}.$$

Adja meg a rendszer Hamilton függvényét és alkalmazza Pontrjagin-féle maximum elvet!

17. Legyen $T > 0$ és $x \in \mathbb{R}$ adott. Tekintsük az alábbi problémát:

$$\inf \left\{ \int_0^T (u(t))^2 \, dt + x(T), \quad x(0) = x, \ x'(t) = x(t) + u(t) \right\}.$$

Adja meg a rendszer Hamilton függvényét, írja fel a Hamilton-Jacobi-Bellman egyenletet és adja meg egy megoldását!

18. Legyen $T > 0$ és $x \in \mathbb{R}$ adott. Tekintsük az alábbi problémát:

$$\inf \left\{ \int_0^T (u(t))^2 \, dt + x(T), \quad x(0) = x, \ x'(t) = x(t) + u(t) \right\}.$$

Oldja meg a problémát csupán variációs módszerekkel!

19. Legyen $T > 0$ és $x \in \mathbb{R}$ adott. Tekintsük az alábbi problémát:

$$\inf \left\{ x(T), \quad x(0) = x, \ x'(t) = -u(t)x(t) + \frac{1}{2}|u(t)|^2 \right\}.$$

Adja meg a rendszer Hamilton függvényét és alkalmazza Pontrjagin-féle maximum elvet!

20. Legyen $T > 0$ és $x \in \mathbb{R}$ adott. Tekintsük az alábbi problémát:

$$\inf \left\{ x(T), \quad x(0) = x, \ x'(t) = -u(t)x(t) + \frac{1}{2}|u(t)|^2 \right\}.$$

Adja meg a rendszer Hamilton függvényét, írja fel a Hamilton-Jacobi-Bellman egyenletet és adja meg egy megoldását!

21. Tekintsük az alábbi autonóm Hamilton-féle rendszert:

$$x'(t) = \partial_p H(x(t), p(t)), \quad p'(t) = -\partial_x H(x(t), p(t)).$$

   (a) Igazolja, hogy ha (x, p) megoldása a rendszernek, akkor $t \mapsto H(x(t), p(t))$ állandó!

   (b) Ha H koercív, azaz

$$\lim_{|(x,p)| \to +\infty} H(x, p) = +\infty,$$

   akkor igazolja, hogy a rendszer minden megoldása korlátos!

22. Alkalmazza az előző feladat eredményeit az alábbi problémára:

$$\inf\left\{\int_0^T [|u(t)|^2 + V(x(t))]\,dt, \quad x'(t) = u(t), \quad x(0) = x_0\right\},$$

ahol $V \in C^1$ konvex és koercív! Értelmezze a kapottakat!