D3	A pályázó neve: **Dr. Tóth Bálint**	A pályázat azonosítója: **2011TKI508**

RÉSZLETES KUTATÁSI TERV

Tervezett kutatásaink három fő területre oszthatók: 1. sztochasztikus folyamatok, 2. dinamikai rendszerek, 3. statisztika és információelmélet. Alább ezek számos kapcsolódási pontjára kitérünk. Mindhárom területen kulcsszerepe van a tervezett hazai és nemzetközi együttműködéseknek, szoros szakmai és együttműködési kapcsolataink vannak (többek között) az következő egyetemek matematika intézeteivel/tanszékeivel: *École Normale Supérieure (Paris), Université Paris Sud Orsay, ETH Zürich, University of Maryland, Courant Institute New York University, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", Hebrew University of Jerusalem*. Eredményeink rendszeresen a matematikai statisztikus fizika, a valószínűségelmélet és az információelmélet vezető folyóirataiban jelennek meg.

Az alábbi kutatási tervben hivatkozott cikkek részletes adatai a D12 mellékletben találhatók.

I. SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK

I.1 Mean field erdőtűz-modell

A [RT09] cikkben szereplő modell egy dinamikusan növekvő Erdős-Rényi gráf, melyben az óriáskomponenseket egy "erdőtűz" mechanizmus rendszeresen kitörli. Az összefüggő komponensek struktúráját elágazó folyamatok segítségével karakterizáljuk, a megjelenő struktúrák várhatóan gazdagabbak lesznek, mint az erdőtűz nélküli Erdős-Rényi gráfban. A nagy komponensek összeolvadási dinamikáját és az óriáskomponens születését az Erdős-Rényi modell kritikus ablakában az ún. *multiplicative coalescent* folyamat segítségével írták le [A97]. Az erdőtűz-modell és a fagyott perkolációs modell nagy komponensei is várhatóan hasonló folyamatok segítségével karakterizálhatóak, ezt is vizsgáljuk.

I.2 Random interlacements

Ezt a perkolációs modellt 2007-ben vezették be [Sz10]. A d-dimenzios rácsból ($d>2$) megszámlálható sok duplán végtelen bolyongási trajektóriát távolítunk el úgy, hogy a visszamaradó véletlen gráf eloszlása eltolás-invariáns és pozitív sűrűségű. A keletkező szivacsos halmazon a sűrűség változtatásával nem-triviális perkolációs fázisátmenet figyelhető meg. Még sok a nyitott kérdés a modellel kapcsolatban: Mennyire éles a fázisátmenet? A kritikus pont közelében mekkora az óriáskomponens sűrűsége? Más univerzalitási osztályba esik ez a modell, mint a klasszikus Bernoulli-perkoláció?

I.3 Diffusion limited aggregation (DLA)

Az 1-dimenziós DLA folyamatban [KS08] a kezdeti időpontban N minden csúcsán Poisson(u) darab részecske található, ezek a részecskék független egyszerű bolyongást végeznek, de az origót tartalmazó komponens ragadós: ha egy részecske hozzáér, akkor abbahagyja a bolyongást és maga is a komponens részévé válik. E komponens növekedésének sebességét vizsgáljuk: az a sejtés, hogy ez $u<1$ esetén az idővel gyökösen, $u>1$ esetén az idővel egyenesen, míg $u=1$ esetén az idő 2/3-adik hatványával arányos. A modellel kapcsolatos új heurisztikák matematikai kidolgozása is érdekes feladat.

I.4 Határeloszlás-tételek ön-kölcsönható folyamatokra

A kutatás célja az ön-kölcsönható rendszerek minél szélesebb családjában a skálázási és aszimptotikus tulajdonságok leírása. Horváth, Tóth és Vető illetve Tóth és társszerzőinek a „rövidlátó" öntaszító bolyongásra (*„myopic" or 'true' self-avoiding walk*) és az öntaszító Brown-polimerre vonatkozó eredményei jelentik a kiindulópontot. Tervezzük az eddigi kutatás folytatását elsősorban a magas dimenziós modellekben várt centrális határeloszlás-tétel (CHT) irányában. Ez a fenti modellek egy bizonyos családjában ismert [HTV11], de az alkalmazott funkcionálanalitikus eszközök várhatóan túlmutatnak az eddig leírt modelleken. A Kipnis-Varadhan módszerek egy új eleme a gyengített szektorfeltétel, amely általánosabb érvényű a CHT eddigi elégséges feltételeinél. A kutatás egyik iránya a fenti feltétel érvényességi körének vizsgálata. Erre a fentieken kívül véletlen közegű bolyongás modellekre is várhatunk új eredményeket. A statisztikus fizikából származó ún. *six vertex* modellt illetve ezek változatait is vizsgáljuk; itt a várt CHT más elégséges feltételének bizonyításához szükséges ún. *grading* nem teljesül. A gyengített szektorfeltétel azonban a fellépő operátorok természetes módon felmerülő funkcionálanalitikus tulajdonságain múlik. Szeretnénk még más magas dimenziós bolyongásmodellekre is a CHT érvényét kiterjeszteni.

I.5 Általános Ray-Knight elmélet egydimenziós ön-kölcsönható folyamatokra

A kutatás célja egydimenziós ön-kölcsönható folyamatok minél szélesebb osztályaiban a skálázási és aszimptotikus tulajdonságok vizsgálata a lokális idő elemzésén alapuló Ray-Knight-elmélet segítségével. E modellekben az önkölcsönhatás a bolyongás saját lokális idejének függvénye. Célunk az ismertekhez képest (pl. [T96, TV08]) újabb típusú függések esetén aszimptotika és határeloszlás-tétel vizsgálata. Az eredmények várhatóan eltérnek mind a kölcsönhatás nélküli, mind a magas dimenziós esettől.

I.6 Stacionárius fluktuációk aszimmetrikus kölcsönható részecskerendszerekben

Az áram vagy felületnövekedés $t^{1/3}$ nagyságrendű fluktuációi központi probléma a kölcsönható részecskerendszerek elméletében. Aszimmetrikus esetben a vonatkozó határeloszlások a véletlen mátrixok elméletéből ismert Tracy-Widom eloszlásokkal vannak kapcsolatban. Három fő irányban folynak vizsgálatok:

- Funkcionálanalitikus eszközökkel kezelhető a fluktuációk nagyságrendje Tauberi értelemben, [QV07].
- Egyes modellek és determinánsfolyamatok közti egzakt kapcsolatok mentén határeloszlás-tételek bizonyíthatók.
- Tisztán valószínűségszámítási és csatolásos módszerekkel is lehet a fluktuációk nagyságrendjét bizonyítani. A módszer alkalmazható a Hammersley folyamatra [CG06], a *last passage* perkolációra [BCS06], a kizárásos folyamatra (ASEP) [BS10], egyes *zero range* folyamatokra [BK08, BKS11], és irányított polimerekre [S10].

A terület fontosságát mutatja, hogy az eredmények lehetővé tették a híres Kardar-Parisi-Zhang egyenlet bizonyos megoldásainak vizsgálatát is. Jelentős hozzájárulásunk van a harmadik csoportban felsorolt módszerekhez. [BKS11] cikkünkben a módszer egy robusztus megfogalmazását adtuk, mely a modell részleteitől csak egy jól meghatározott ponton függ. E pont abból áll, hogy az ún. másodosztályú részecskére kell csatolási tulajdonságokat ellenőriznünk. E részecskék önmagukban nem markovi tulajdonságúak, ami meglehetősen bonyolítja a helyzetet, és bizonyos mértékig kapcsolatot is teremt a fenti rövidlátó öntaszító bolyongásokkal. Tervezzük a fenti csatolási tulajdonságok vizsgálatát, megpróbálunk minél robusztusabb eszközöket találni, így módszerünket egyre több modellre kiterjeszteni. Vizsgáljuk továbbá az öntaszító bolyongásoknál látott hasonló skálázás mögött rejlő mélyebb analógiákat is.

I.7 Nem attraktív modellek csatolása

A másodosztályú részecskék attraktív modellek vizsgálati módszereiben tettek nagy szolgálatot, mivel számuk megmarad a rendszer időfejlődése során. Nem attraktív esetben viszont a módszerek nem alkalmazhatóak, hiszen itt másodosztályú részecskék keletkezhetnek és eltűnhetnek. Szimulációk azt mutatják, hogy bár a másodosztályú részecskék száma nem konstans, mégis sztochasztikus korlátok között marad. Tervezzük ennek a viselkedésnek a precíz vizsgálatát.

I.8 Kölcsönható rendszerek stacionárius eloszlásai

Az ismert eredmények nagy része olyan modellekre vonatkozik, melyek extremális eltolás-invariáns stacionárius eloszlásai szorzat alakúak. Kevesebbet tudunk olyan modellekről, melyeknek nincs szorzat alakú ilyen eloszlásuk. Szintén keveset tudunk a stacionárius eloszlásról akkor, ha a modellt egy dinamikusan mozgó pontból (pl. egy másodosztályú részecske pozíciójából) figyeljük. Végül nem eltolás-invariáns stacionárius eloszlásokról (pl. ún. blokkoló mértékekről) is kevés ismert, ezek nagy része az ASEP-re vonatkozik. A közelmúltban új technikák születtek mátrixszorzatok [BE07], sorbanállási rendszerek [FM07] segítségével. Tervezzük nem szorzat alakú stacionárius és/vagy blokkoló mértékek vizsgálatát kölcsönható rendszerekben.

I.9. Determinisztikus modellek által motivált bolyongások aszimptotikus viselkedése.

A II.3 pontban leírt dinamikai problémák tárgyalásának első lépése egy-egy analóg sztochasztikus modell vizsgálata. Példa ilyen modellpárra a determinisztikus periodikus Lorentz folyamat és a sztochasztikus belső állapotú bolyongás [N10, P09]. Ilyen sztochasztikus folyamatokra (elsősorban bolyongásokra) vonatkozóan tervezzük Dvoretzky-Erdős vagy Erdős-Taylor típusú tételek adaptációját.

I.10. Dinamikai rendszerek által motivált kölcsönható részecskerendszerek

A II.2 pont kölcsönható részecskerendszerek származtatásáról szól dinamikai hővezetés-modellekből. Tervezzük az így kapott rendszerek hidrodinamikai határesetének vizsgálatát diffúzív skálázás mellett, a Fourier-féle hővezetési törvény bizonyítását. Nehézség, hogy a "részecskeszám" szerepét játszó energia folytonos, és hogy a rendszer nem gradiens típusú. Másfelől több esetben, pl [PGySzT10] a folyamat formailag hasonló egy Varadhan által tárgyalt nem-gradiens rendszerhez [V93].

II. ERGODELMÉLET ÉS DINAMIKAI RENDSZEREK

II.1. Hiperbolikus biliárd típusú dinamikák statisztikus tulajdonságai

Ezen a területen évtizedes múltú kutatásainkat szeretnénk folytatni, újabb irányokba kiterjeszteni. Magas dimenziós szóró biliárdokra vonatkozó jelentős eredményeinkből (különösen [BT08]) kiindulva tervezzük ezeknek a rendszereknek a még pontosabb megértését, konkrétan az ún. komplexitási feltétel tisztázását. Szintén korábbi kutatások [BG06] szerves folytatásaként vizsgálnánk a gyengén hiperbolikus biliárdokban (pl. stadion, végtelen horizontú Lorentz gáz, szóró biliárd *cusp*-pal) fellépő anomális diffuzív jelenségeket (nem-standard határeloszlás-tételek). Az utóbbi témához szorosan kapcsolódik a transzportegyütthatók paraméterfüggésének kérdése, mely egyúttal fontos eszköz az alábbi II.2. témához. Tervezzük hasonló kérdések vizsgálatát a hagyományos biliárdokon túl további, fizikailag releváns rendszerekre (pl. biliárdokra külső térben, vagy a keménygolyó kölcsönhatás általánosításaként potenciállal leírt kölcsönhatások tágabb osztályára). Szóró biliárdok exponenciális korrelációlecsengésére 1998-ban született az első eredmény [Y98], diszkrét időben. A folytonos idejű változat azóta is nyitott. Célunk a legegyszerűbb estekre (2 dimenzió, véges horizont) az exponenciális korrelációlecsengés bizonyítása (esetleg cáfolata). A [DSz03] eredmény továbbfejlesztésével szeretnénk elméleti alapot teremteni hiperbolikus dinamikák statisztikus tulajdonságainak numerikus vizsgálatához. A probléma technikailag rokon a II.2 és II.3 ponttal.

II.2. Térben kiterjedt nem-egyensúlyi jelenségek modellezése kölcsönható elemi dinamikai rendszerekkel

A statisztikus fizika fontos kérdése, hogyan lehet egy nagy rendszer elemi mozgástörvényei alapján megérteni - megfelelő skálázás után - a makroszkopikus viselkedésre jellemző termodinamikai mennyiségeket, az őket leíró parciális differenciálegyenleteket. Hogyan lehet pl. hővezetési egyenletet levezetni Newton-törvényekből. Ezt a Gaspard és Gilbert [GG06] által használt kétlépéses megközelítésben kívánjuk vizsgálni. Ehhez egyaránt szükségesek a sztochasztikus folyamatok elméletének és az ergodelméletnek az eszközei. Utóbbi vonatkozásában a közelmúltban rendkívüli lehetőségek nyíltak meg a matematikailag szigorú tárgyalás előtt [DL10]. Konkrét rendszerekre mi is megtettük az első lépéseket [BLY06, PGySzT10]. Tervezzük csatolt hiperbolikus rendszerekből álló, fizikailag realisztikus hővezetés-modellekben annak bizonyítását, hogy a gyenge csatolás határesetben a rácspontokon tárolt energiák folyamata egy Markov folyamathoz (kölcsönható részecskerendszerhez) tart. Cél a Markov folyamat pontos karakterizálása is. Ezeknek az igen nehéz problémáknak a kezeléséhez szükségesek az II.1 pont kutatásaihoz kapcsolódó tapasztalatok. A feladat technikailag rokon a II.3 tervekkel is. Ez a terv közvetlenül kapcsolódik a sztochasztikus I.10 témához: e két probléma megoldása jelenti bizonyos értelemben a hővezetés kérdésének megválaszolását.

II.3. Térben vagy időben nem homogén dinamikák statisztikus tulajdonságai

Az utóbbi évek eredményei alapján ma már reális esély mutatkozik a térben nem homogén dinamikák különböző statisztikus tulajdonságainak szigorú matematikai tárgyalására (pl [DSzV09]). Ilyenkor sokszor a sztochasztikus modell viselkedése sem nyilvánvaló, például [N11] esetén. Jó példa a lokálisan perturbált periodikus Lorentz folyamatot, vagy biliárdok kvázi-periodikus környezetben. Tervezzük ilyen rendszerek további vizsgálatát mind sztochasztikus, mind ergodelméleti szempontból. Első lépésként analóg sztochasztikus modelleket vizsgálunk, lásd az I.9 témát. Az időben nem homogén hiperbolikus rendszerek a [ChD09] dolgozat hatására kerültek az érdeklődés homlokterébe. Ebben a témában határeloszlás-tétel bizonyítása a célunk, egymáshoz valamilyen értelemben közel levő (egy- vagy többdimenziós) dinamikák alkalmazása esetén.

III. MATEMATIKAI STATISZTIKA ÉS INFORMÁCIÓELMÉLET

E kutatás célja alapvető kérdések megválaszolása a nem-paraméteres statisztika, becsléselmélet és sztochasztikus folyamatok tesztelése témaköréből. Becslés esetén a folyamat megfigyelt mintái alapján kell megbecsülnünk a feltételes mediánt, feltételes várhatóértéket, feltételes eloszlást. Cél lehet emellett becsülni a még ismeretlen jövőbeni értékeknek valamilyen függvényét is, pl. valamely megállási időig hátralévő időt. A feladat nehézségét az okozza, hogy a megfigyelt minták számának növekedésével e mennyiségek is változnak, azaz a megfigyelésekkel módosul a becsülendő függvény. Vizsgálni fogunk mind diszkrét, mind folytonos idejű ergodikus folyamokat. A becslés jóságának mérésére diszkrét idő esetén vagy közvetlenül a hiba nagyságát, vagy a Cesaro-átlagot használjuk, folytonos idő esetén pedig a Cesaro-átlag integrál verzióját. Célunk konzisztens becsléseket megadása, a momentum feltételek tisztázása.

Új típusú eljárás az úgynevezett időszakos becslés, amikor folyamatok egy osztályára már nem lehet minden időpontban becsülni, mert elvileg sincs ilyen konzisztens eljárás. Ekkor csak időszakosan fogunk becsülni, amikor jó becslést tudunk adni. Itt azon időpontok sűrűsége az érdekes, amikor becsülni tudunk, az összes időponthoz képest. Egyik célunk megvizsgálni a konvergencia sebességét a stacionárius folyamatok speciális osztályaira, pl. felújítási folyamatokra, *végesen Markov-jellegű* folyamatokra.

További céljaink: egyrészt bebizonyítani különböző algoritmusokra és bizonyos folyamatokra a centrális határeloszlás tételt, azaz, hogy a becslés megfelelően normálva aszimptotikusan normális, másrészt: véletlen Markov mezők esetén megbecsülni a véges környezet nagyságát.

Folyamat-tesztelés témában célunk a Poisson-folyamatot megkülönböztetni a többi stacionárius növekményű pontfolyamattól. Ennek 2-dimenziós változatát is vizsgálni fogjuk.

Ergodikus rendszerek numerikus vizsgálata során gyakran egyetlen hosszú trajektória megfigyeléséből vonnak le statisztikus következtetéseket. Kutatásaink ennek elméleti megalapozásában is szerepet játszanak, kapcsolódva a II.1 ponthoz.

Ütemezés:

2012-2014: I.1 (részben), I.3, I.4, I.8, I.9, I.10, II.1, III (részben)
2014-2016: I.1 (részben)**,** I.2, I.5, I.6, I.7, II.2, II.3, III (részben)