

BESZÁMOLÓ A 2007 ÉS 2010 KÖZÖTT VÉGZETT KUTATÁSOKRÓL

A 2007-2011 ciklusban is vezettem kutatócsoportot. Ennek neve

MTA-BME Sztochasztika Kutatócsoport

A benyújtott pályázat tervezett személyi állománya részben átfed a jelenleg működő kutatócsoportéval, de nem azonos azzal. Ezért itt csak azoknak a kutatóknak az elmúlt három évi eredményeiről számolunk be, akik a jelen működő kutatócsoportnak nem tagjai (Dr. Tóth Bálint (pályázó), Dr. Balázs Márton, Dr. Bálint Péter). A most benyújtott pályázatban és a jelenleg is működő kutatócsoportban az elmúlt három évben egyaránt szereplő kutatók (Dr. Morvai Gusztáv, Dr. Tóth Imre Péter, Dr. Ráth Balázs, Vető Bálint, Horváth Illés) kutatási eredményei a kutatócsoport éves beszámolóiban megtalálhatóak.

Dr. TÓTH BÁLINT BESZÁMOLÓJA:

Véletlen gráfok dinamikus fejlődése:

Messzemenően kiterjesztettük az ún. *preferential attachment* hálózatonövekedési modellt (vagy: gráf-növekedési modellt). A sokat vizsgált lineáris növekedési rátafüggvényt (ami a Barabási-Albert modell családot definiálja) kicseréltük sokkal általánosabb rátafüggvények családjára és martingál-módszerek helyett, folytonos időbe való beágyazással és analitikusabb jellegű módszerekkel erős eredményeket bizonyítottunk a gráf-növekedés aszimptotikus viselkedésére. Teljes általánosságban leírtuk a hosszú idő után kialakuló gráf lokális struktúráját. Hivatkozások: [1], [2].

Az Erdős-Rényi véletlen gráf modell dinamikus megfogalmazásában az összeolvadási mechanizmus (coagulation) mellett bevezettünk egy töredezési mechanizmust (fragmentation) is, amit ún. erdőtűzek okoznak. Pontosabban: amellet, hogy a gráf élei az Erdős-Rényi féle mechanizmus szerint Poisson módon megjelennek a gráfban, időnként „villámcsapások” következtében az összefüggő komponensek élei „leégnek”, azaz az összefüggő komponensek darabokra hullnak. E két vetekedő mechanizmus következtében egy érdekes jelenség alakul ki: a rendszer önszerveződő módon kritikussá válik, érdekes hatványrendű lecsengések jelennek meg a releváns eloszlásokban. Ez egy sokat vizsgált, de mindeddig kevésbé értett fizikai jelenség, az *önszerveződő kritikusság* (self organized criticality) megnyilvánulása. Matematikai aspektusból a bizonyítások meglepő ötvözetei differenciálegyenletes és valószínűségszámítási módszereknek. Hivatkozások: [3], [4].

Statisztikus fizikai kutatások:

A felcserélhető valószínűségi változók elméletét részben használva, részben kiterjesztve, új típusú korrelációs összefüggéseket bizonyítottunk mean field jellegű modellek nagy családjára. Konstruktív módszerekkel bizonyítottunk beágyazhatósági és nem-beágyazhatósági eredményeket végesen felcserélhető rendszerekre a kölcsönhatások jellegétől (ferromágneses, illetve antiferromágneses) függően. A bizonyítások komplex függvénytani, kombinatorikus és valószínűségszámítási elemeket egyaránt tartalmaznak. Hivatkozás [5].

A Brown-mozgás dinamikai elméletéhez szóltunk hozzá egy érdekes modell elemzésével. Egyrészt beláttuk, hogy az ún. Calogero-Moser-Sutherland kölcsönhatás előállítható úgy, hogy két 1-tömegű részecske közé egy infinitezimálisan kis tömegű részecskét helyezünk és a rendszert

rugalmas ütközésekkel hagyjuk fejlődni. Ez önmagában is meglepő eredmény. Ennek felhasználásával elemeztük azt a modellt, amikor egy (infinitezimálisan) kis tömegű részecske hat kölcsön, rugalmas ütközések útján egy végtelenül kiterjedt ideális gázzal. A megjelölt (kis tömegű) részecske elmozdulásának szórásnégyzetére bizonyítottunk releváns becsléseket. Hivatkozás [6].

Sztocasztikus folyamatok:

Új eloszlásbeli azonosságot bizonyítottunk Szkorohod féle tükrözéseknek alávetett Brown-mozgások és Bessel-folyamatok között. Hivatkozás [7].

Hosszú memóriájú kölcsönható bolyongások és diffúziók:

Korábbi egy-dimenziós eredményeinket kiterjesztettük olyan ön-taszító (self-repelling) bolyongásokra, amikor a lokális időt, ami a kölcsönhatást meghatározza a \mathbf{Z} gráf irányított élein mérjük. Itt meglepő módon korábbi eredményeinktől eltérő aszimptotikus skálázást találtunk. Hivatkozás [8].

Szintén a korábbi egy-dimenziós eredményeket kiterjesztve, folytonos idejű öntaszító bolyongásokra bizonyítottunk $t^{2/3}$ skálázású határeloszlás-tételt. Hivatkozás [9].

Robusztus (kombinatorikus részletektől nem függő) szuper-diffúzív becsléseket adtunk öntaszító bolyongásoknak tág családjára. A bizonyítások erős funkcionálanalitikus módszerekre épülnek. Hivatkozás [10].

Bebizonyítottuk, hogy az ún. "true" self-repelling random walk három és magasabb dimenzióban valóban diffúzív módon viselkedik, ahogyan azt az elméleti fizikus irodalomban megsejtették. A bizonyítás rafinált ötvözetű valószínűségszámítási és funkcionálanalitikus módszereknek. A Kipnis-Varadhan tételkört használjuk és bővítjük. Hivatkozás [11].

Bebizonyítottuk, hogy a fizikus sejtésekkel összhangban, a fenti model-család két dimenzióban szuper-diffúzív: a normális $t^{1/2}$ skálázás mellett egy multiplikatív logaritmikus faktor is megjelenik. A bizonyítás Landim-Quastel-Salmhofer-Yau nevezetes variációs módszerén alapszik, de lényeges új elemeket is tartalmaz. Hivatkozás [12].

Új típusú kölcsönható bolyongásokat vizsgáltunk, amikor a kölcsönhatási mechanizmus nem csak a legközelebbi szomszéd éleken töltött lokális időt veszi figyelembe (mint a korábbi vizsgálatok során), hanem távolabbi szomszédokat is. Meglepő új jelenségeket találtunk: az első- és második szomszéd kölcsönhatások versengéséből érdekes új típusú aszimptotikus viselkedések és skálázódások alakulhatnak ki. Ezek közül néhányat kielemeztünk és több nehéznek tűnő sejtést fogalmaztunk meg. Hivatkozás [13], [14].

Hivatkozások:

- [1] A. Rudas, B. Tóth, B. Valkó: Random Trees and General Branching Processes. *Random Structures and Algorithms* **31** (2007) 186-202
- [2] A. Rudas, B. Toth: Random tree growth with branching processes -- a survey. In: B. Bollobas, R. Kozma, D. Miklos (eds) *Handbook of Large-Scale Random Networks* *Bolyai Society Mathematical Studies* **18**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2008
- [3] B. Rath, B. Toth: Triangle percolation in mean field random graphs -- with PDE. *Journal of Statistical Physics* **131** (2008) 385-391
- [4] B. Rath, B. Toth: Erdos-Renyi random graphs + forest fires = self-organized criticality. *Electronic Journal of Probability* **14** (2009), Paper no. 45, pages 1290–1327

- [5] T. M. Liggett, J. E. Steif, B. Tóth: Statistical mechanical systems on complete graphs, infinite exchangeability, finite extensions and a discrete moment problem. *The Annals of Probability* **35** (2007) 867-914
- [6] P. Balint, B. Toth, P. Toth: On the zero mass limit of tagged particle diffusion in the 1-d rayleigh gas. *Journal of Statistical Physics* **127** (2007) 657--675
- [7] B. Toth, B. Veto: Skorohod-reflection of Brownian Paths and BES³. *Acta Sci. Math (Szeged)* **73** (2007) 781-788
- [8] B. Toth, B. Veto: Self-repelling random walk with directed edges on \mathbb{Z} . *Electronic Journal of Probability* **13**, paper no. 62, pp. 1909–1926 (2008)
- [9] B. Toth, B. Veto: Continuous time ‘true’ self-avoiding random walk on \mathbb{Z} . *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **8**: 59–75 (2011)
- [10] P. Tarres, B. Toth, B. Valko: Diffusivity bounds for 1d Brownian polymers. *The Annals of Probability* (to appear, 2011)
- [11] I. Horvath, B. Toth, B. Veto: Diffusive limits for "true" (or myopic) self-avoiding random walks and self-repellent Brownian polymers in three and more dimensions. *Probab. Theor. Rel. Fields* (to appear, 2011)
- [12] B. Toth, B. Valko: Superdiffusive bounds on self-repellent Brownian polymers and diffusion in the curl of the Gaussian free field in $d=2$. (submitted)
- [13] A. Erschler, B. Toth, W. Werner: Some locally self-interacting walks on the integers. In: *Bolthausen-Gaertner Festschrift*, Springer, 2011 (to appear)
- [14] A. Erschler, B. Toth, W. Werner: Stuck Walks. (submitted)

Dr. BALÁZS MÁRTON BESZÁMOLÓJA:

2006-ban jelent meg [1] cikkünk, melyben a last passage perkoláció idejének illetve a leghosszabb út helyzetének fluktuációit vizsgáltuk. Speciális peremfeltételeket használtunk, melyek a last passage perkolációnak megfeleltethető teljesen aszimmetrikus kizárásos folyamat (TASEP) stacionárius, eltolás-invariáns kezdeti eloszlásának felelnek meg. Cator és Groeneboom [CG06] cikkére (ld. D12 melléklet), illetve Ferrari és Pimentel munkájára alapozva sikerült tisztán valószínűségszámítási módszerek és csatolások segítségével $t^{1/3}$ skálázást kimutatni a karakterisztikus irányban mért fluktuációkban. Eljárásunk lényegesen különbözött a kombinatorikus megfeleltetésen és determinánsok aszimptotikus analízisén alapuló módszerektől, és a TASEP ún. másodosztályú részecskéjének megfelelő competition interface kulcsfontosságú volt benne.

Ezután készült el [2] cikkünk, melyben a módszert - új, nem-triviális csatolási érvelésekkel, és egy újabb, egyszerűbb fluktuációs alsó korláttal - átírtuk last passage perkolációról a részecskék nyelvére, és rögtön kiterjesztettük a részlegesen aszimmetrikus kizárásos folyamatra (ASEP). Ezzel a világon elsőként bizonyítottuk a karakterisztikus fluktuációk helyes nagyságrendjét az ASEP-re.

Jeremy Quastellel és Timo Seppäläinennel a módszert finomítottuk a gyengén aszimmetrikus kizárásos folyamatra, így Bertini és Giacomin eredményein keresztül a híres Kardar-Parisi-Zhang egyenlet bizonyos megoldásainak skálázásáról is született eredményünk [3] (megjelenés alatt a JAMS-nél).

Az elmúlt négy évben nagyrészt ennek a bizonyításnak egyéb modellekre való kiterjesztésével foglalkoztam. Módszerünk ugyanis láthatóan sokkal robusztusabb volt, mint a kombinatorikus azonosságokon alapuló eljárások. Először Komjáthy Júliával - akinek ez diplomamunkája volt - átírtuk a bizonyításunkat teljesen aszimmetrikus konstans rátájú zero range folyamatra [4]. Az itt szerzett tapasztalatokat, illetve az időközben elvégzett egyszerűsítéseket felhasználva sikerült egy általános modelleszaládra megadnunk a bizonyítást: a megfelelő skálázás most már következik egy ún. mikroszkopikus konkavitásnak nevezett tulajdonságból, ami a másodosztályú részecskék egymáshoz való csatolhatóságát mondja ki [5]. E tulajdonság teljesül a korábban vizsgált ASEP és konstans rátájú zero range modellekben, de rögtön ellenőriztük egy kellően konkáv rátafüggvényű zero range folyamatra is. Mostanában készül pedig a legújabb cikkünk a témában, itt konkáv helyett egy konvex exponenciális rátájú zero range (illetve annak általánosítása, az ún. kőműves) modellre mutatjuk meg a fluktuációk $t^{1/3}$ -os skálázását. Ebben a cikkben egy, a ráták nem korlátos növekményeiből származó technikai problémát is kezelni kellett, amihez felhasználtuk a következő bekezdésben szereplő eredményt is.

Korábbi cikkeim folytatásaként Farkas György és Kovács Péter hallgatókkal és Rákos Attilával írtunk egy cikket [6] melyben megmutatjuk, hogy az ASEP-ben és a fent is szereplő exponenciális kőműves modellben ismert kétféle eredmény:

- szorzat-stacionárius eloszlások a másodosztályú részecske pozíciójából nézve;
- "bolyongó" szorzat-lökéshullám eloszlások

kapcsolatban állnak egymással. A bolyongó szorzat-lökéshullám eloszlásokba ugyanis sikerült beillesztenünk a másodosztályú részecskét is, így e kétféle eredményt közös keretbe foglaltuk. Járulékos haszon, hogy a bolyongásból könnyen számolható eloszlásbeli korlátok csatolásokkal a stacionárius eloszlásban indított másodosztályú részecskére is átvihetők, ami fontos volt az exponenciális kőműves modellben bizonyított $t^{1/3}$ skálázású fluktuációk esetén.

Tóth Bálinttal és Rácz Miklós Zoltánnal egy új témakörben is dolgoztunk: véges sok részecske ugrófolyamat szerint mozog \mathbb{R} -en, a rendszer tömegközéppontja minden pillanatban meghatározásra kerül. Egy adott részecske ugrási rátája a részecske tömegközépponthez képesti relatív helyzetétől függ. A lemaradó részecskék gyorsabban, az elől levők pedig lassabban ugranak előre. A modellre egy integro-differenciál egyenletet írtunk fel abban a limeszben, amikor a részecskék száma végtelenhez tart. Az egyenlet megoldásait vizsgáltuk, illetve az egyenlet megoldásaihoz való konvergenciát bizonyítottuk. Rácz Miklós Zoltán a témakörrel OTDK második helyezést ért el, illetve MSc diplomamunkát írt, az elkészült cikket hamarosan publikáljuk [7].

Egy másik hallgatóval, Folly Áronnal pedig a jól ismert reverzibilis Markov folyamatok - elektromos ellenállás-hálózatok analógiát sikerült kiterjesztenünk irreverzibilis láncok esetére egy új elektromos alkatrész segítségével, pillanatnyilag az analógia alkalmazhatóságát vizsgáljuk.

Hivatkozások:

- [1] M. Balázs, E. Cator, T. Seppäläinen: Cube root fluctuations for the corner growth model associated to the exclusion process, *Elect. J. Prob.* **11**, 1094-1132 (2006)
- [2] M. Balázs, T. Seppäläinen: Order of current variance and diffusivity in the asymmetric simple exclusion process, *Ann Math* **171** 1237-1265 (2010)
- [3] M. Balázs, J. Quastel, T. Seppäläinen: Scaling exponent for the Hopf-Cole solution of KPZ/Stochastic Burgers. *Journ. AMS* (to appear, 2011)
- [4] M. Balázs, J. Komjáthy: Order of current variance and diffusivity in the rate one totally asymmetric zero range process, *J Stat Phys* **133** 59-78 (2008)
- [5] M. Balázs, J. Komjáthy, T. Seppäläinen: Microscopic concavity and fluctuation bounds in a class of deposition processes. *Ann Inst H Poincare-Prob. et Stat.* (to appear, 2011)
- [6] M. Balázs, G. Farkas, P. Kovács, A. Rákos: Random walk of second class particles in product shock measures. *Journ. Stat. Phys.* **139** 252-279. (2010)

Dr. BÁLINT PÉTER BESZÁMOLÓJA:

1.

Korábbi kutatásainak szerves folytatásaként tanulmányozta hiperbolikus biliárdok ergodikus tulajdonságait. Tóth Imre Péterrel közösen bizonyítottak egy régóta nyitott sejtést: magas dimenziós szóróbiliárdokban – a szingularitásokra vonatkozó természetes komplexitási feltétel mellett – a korreláció-lecsengés sebessége exponenciális ([2], [3], [4] dolgozatok). Eredményük jelentőségét mutatja, hogy a [3] publikáció elnyerte az Annales Henri Poincaré folyóirat 2008 évi díját.

Szintén korábbi kutatásokra épülnek az intermittens viselkedést mutató, és ezért gyengébben hiperbolikus síkbeli biliárdok ergodikus tulajdonságaira vonatkozó eredmények. Ian Melbourne-nel közösen szuper-polinomiális korreláció-lecsengést és majdnem biztos invariancia elvet bizonyítanak a folytonos idejű dinamikára cusp jelenlétében ([5] publikáció), a [7] dolgozatban pedig ergodikus konvex biliárdok egy új családját tárja fel társszerzőivel.

2.

Az egyedi biliárddinamikák tanulmányozása mellett vizsgálatait kiterjesztette – a statisztikus fizika szempontjából különösen érdekes – térben kiterjedt rendszerek irányába. Tóth Bálinttal és Tóth Imre Péterrel közösen a jelölt részecske aszimptotikus szórását vizsgálták az egydimenziós Rayleigh gázban, kis tömeg határesetben ([1] dolgozat). Kevin Linnel és Lai-Sang Younggal hővezetési jelenségek modellezéséhez kapcsolódóan egy tisztán determinisztikus időfejlődésű rendszert tanulmányoztak, melynek integrálhatóságát pusztán a véletlen határfeltételek törlik meg: többek között ez adja az invariáns mérték egyértelműségére vonatkozó eredményük jelentőségét ([6] publikáció).

Hivatkozások:

- [1] P. Bálint, B. Tóth, I.P. Tóth: *Journal of Statistical Physics*, **127** (2007) 657-675.
- [2] P. Bachurin, P. Bálint, I.P. Tóth: *Israel Journal of Mathematics*, **167** (2008) 155-176.
- [3] P. Bálint, I.P. Tóth: *Annales Henri Poincaré*, **9** (2008) 1309-1369.
- [4] P. Bálint, I.P. Tóth: *Erwin Schrödinger Institut preprint* **2084** (2008).
- [5] P. Bálint, I. Melbourne: *Journal of Statistical Physics*, **133** (2008) 435-447.
- [6] P. Bálint, K. Lin, L-S. Young: *Commun. Math. Phys.*, **294** (2010) 199–228.
- [7] P. Bálint, M. Halász, J. Hernández-Tahuilán, D. Sanders: *Nonlinearity*, közlésre elfogadva.