Matematika A1

6. feladatsor

Megoldások

1.

a., $y'=\frac{2}{3x-2}-\frac{3(2x+5)}{(3x-2)^2}$

b., $y'=-\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x(1-x)}{(1+x^2)^2}$

c., $y'=\frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{x^2}$

d., $y'=-\frac{2x}{(x^2-1)^2(x^2+x+1)}-\frac{2x+1}{(x^2-1)(x^2+x+1)^2}$

e., $y'=(3x^2+x^3)e^x$

f., $y'=(2x-e^{-x})\sin(x)+(x^2+e^{-x})\cos(x)$

2.

A függvény egy háromtagú, negyedfokú algebrai kifejezés. A harmadik tagból már n = 1 -nél konstans lesz, ezért n = 2 -nél el is tűnik. A harmadik deriváltnál eltűnik a második tag is, n = 5 -nél az első tagból is nulla lesz.

$$f^{(n)}(x)\equiv 0 \quad , \quad n\geq 5$$

3.

A kéttagú szorzatból mutatjuk meg; kéttagú szorzatra pedig a differenciálhányados definíciójából bizonyítunk.

$$(f(x)g(x))'=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0} f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0} g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=$$

Ha f az x_0-ban folytonos

$$=f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0)$$

Ez bármely x_0-ban igaz (ahol f folytonos), így

$$(fg)'=f'g+fg' \quad .$$

Innen három függvényre

$$(fgh)'=(fg)'h+(fg)h'=f'gh+fg'h+fgh' \quad .$$

4.

a., $\frac{dy}{dx}=-10-3\sin(x)$

b., $\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos(x)}{\sin(x)^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$

c., $\frac{dy}{dx}=-\frac{1+ctg^2(x)}{(1+ctg(x))^2}$

d., $\frac{dy}{dx}=tg^2(x)$

e., $\frac{dy}{dx}=\frac{2\cos(x)}{-2+2\sin(x)+\cos^2(x)}$

f., $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos(2\mathrm{x})}$

5.

a., $y'=\frac{1}{\left(1-\frac{x}{7}\right)^8}$

b., $y'=4\left(\frac{x^2}{8}+x-\frac{1}{x}\right)^3\left(\frac{x}{4}+1+\frac{1}{x^2}\right)$

c., $y'=\frac{\sin(tg(x))(1+tg^2(x))}{\cos^2(tg(x))}$

d., $y'=3\sin^2(x)\cos(x)$

e., $y'=-8\cdot\cos^3(1-2\mathrm{x})\cdot\sin(1-2\mathrm{x})$

f., $y'=\cos(\cos(2\mathrm{x}-5))\cdot\sin(2\mathrm{x}-5)\cdot(-2)$

g., $y'=\dfrac{1+ctg^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\left(1+ctg\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^3}$

h., $y'=\cos(x^2)\cdot 2\mathrm{x}\cdot\cos(2\mathrm{x})-2\cdot\sin(x^2)\cdot\sin(2\mathrm{x})$

i., $y'=\dfrac{\cos(\sqrt{1+\sqrt{x}})}{\sqrt{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}}$

j., $y'=\dfrac{\dfrac{2\mathrm{x}+1}{x^2}-\dfrac{2(x^2+x)}{x^3}}{2\sqrt{\dfrac{x^2+x}{x^2}}}$

k., $y'=3\sqrt{2\mathrm{x}+1}$

l., $y'=-\dfrac{45\mathrm{x}+9\sin(x)\cos(x)}{\left(5\mathrm{x}^2+1-\cos^2(x)\right)^{\frac{5}{2}}}$

6.

a., $y''=\dfrac{6\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x^4}+\dfrac{6\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2}{x^3}$

b., $y''=-\dfrac{2}{3}ctg(3\mathrm{x}-1)\cdot\left(-3-3\,ctg^2(3\mathrm{x}-1)\right)$

7.

a., $f(x)=2\mathrm{x}+5$

b., $f(x)=x+1$

c., $f(x)=12\mathrm{x}+16$

d., $f(x)=-2\mathrm{x}+9$

8.

a., [-2 ; -5]

b., [1 ; -2] ; [-1 ; 2]

9.

Akkor lehet, ha létezik a differenciálhányados az adott pontban.

$$y'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{x}=0$$

Lehet, méghozzá vízszinteset.

10.

Nem lehet, mert a differenciálhányadost jelentő határértéket nem tudjuk a nullában értelmezni (a végtelenbe tart). A függvénynek nem megszűntethető szakadása van ott, mert a jobb – és baloldali határértékek különbözőek.