Matematika A1

14. feladatsor

1. Számoljuk ki az impropius integrálokat!

   (a) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$

   (b) $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{x^{2/3}}dx$

   (c) $\int\limits_2^\infty \frac{2}{x^2-x}dx$

   (d) $\int\limits_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}dx$

   (e) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+\operatorname{arctg} x)}dx$

   (f) $\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

   (g) $\int\limits_{-1}^4 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx$

2. Vizsgáljuk meg, hogy a megadott integrálok konvergensek-e! Használjuk a definiciót, az összehasonlító kritériumokat vagy a hányadostesztet!

   (a) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$

   (b) $\int\limits_0^{\ln 2} x^{-2}e^{-1/x}dx$

   (c) $\int\limits_{-1}^1 \ln|x|dx$

   (d) $\int\limits_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$

   (e) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^6+1}}dx$

   (f) $\int\limits_\pi^\infty \frac{2+\cos x}{x}dx$

   (g) $\int\limits_4^\infty \frac{2}{x^{3/2}-1}dx$

   (h) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$

3. Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^\infty \frac{2xdx}{x^2+1}$$

divergens, így az

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{2xdx}{x^2+1}$$

integrál is divergens! Lássuk be, hogy ezzel szemben

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{2xdx}{x^2+1} = 0!$$

4. Vegyük azt a forgástestet, amely az $y = 1/x$, $1 \le x$ görbe x-tengely körüli megforgatásával keletkezik. A forgástest *felszínét* az

$$\int_1^\infty 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx$$

integrállal számolhatjuk ki. Tudjuk, hogy az $\int_1^\infty (dx/x)$ divergens, így tetszleges b-re

$$\int_1^b 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx > 2\pi \int_1^b \frac{1}{x}dx,$$

amiből az következik, hogy a forgástest felszínét leíró integrál *divergens*. Viszont a test *térfogatát* leíró

$$\int_1^\infty \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

integrál konvergens.

(a) Számoljuk ki az utóbbi integrál értékét!

(b) Ezt a forgástestet sokszor úgy emlegetik, mint egy olyan festékesbödönt, amibe nem fér bele annyi festék, amennyivel be lehetne festeni a belsejét. Töprengjünk el ezen! Az biztos, hogy véges mennyiségű festékkel nem tudjuk befesteni a végtelen területű felszínt. De ha csurig töltjük a bödönt - amihez véges mennyiségű festék is elég - a festék megfesti a felszínt belülről! Oldjuk fel ezt az ellentmondást!