

Építőmérnöki A1 matematika verseny, 2023, Skaláris szorzat, vektoriális szorzat, vegyesszorzat

1. (4 pont) Legyenek egy paralelepipedon nem párhuzamos oldalainak hossza a , b és c . A négy átlójának hosszai legyenek e , f , g és h . Bizonyítsa be, hogy

$$e^2 + f^2 + g^2 + h^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2).$$

2. (6 pont) Tegyük fel, hogy az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ nem nullvektorok és semelyik kettő nem párhuzamos és ugyanez teljesül az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokra is. Bizonyítsa be, hogy ha $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{u} \times \underline{v}$, $\underline{a} \times \underline{c} = \underline{u} \times \underline{w}$ és $\underline{b} \times \underline{c} = \underline{v} \times \underline{w}$ teljesül, akkor $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = \pm(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$.
3. (4 pont) Az A, B, C és D csúcsú tetraéder ABC lapjának súlypontja legyen S_D , ABD lapjának súlypontja S_C , ACD lapjának súlypontja S_B és BCD lapjának súlypontja S_A . Bizonyítsa be, hogy az S_A, S_B, S_C és S_D csúcsú tetraéder térfogatának 27-szerese az A, B, C és D csúcs tetraéder térfogata.