

Miért háromdimenziós a tér?

Etesi Gábor

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Algebra és Geometria Tanszék

„Az atomoktól a csillagokig” előadások
Budapest, 2025. november 20.

MIÉRT HÁROMDIMENZIÓS A TÉR?

MILYEN SZEREPET JÁTSZIK A FIZIKA ALAPVETŐ
TÖRVÉNYEIBEN A TÉR HÁROMDIMENZIÓS VOLTA?

Nem tudjuk.

Pedig az első kérdést **Henri Poincaré** francia matematikus fogalmazta meg 1912-ben, a másodikat **Paul Ehrenfest** osztrák fizikus tette fel 1917-ben, tehát a kérdések immár száz évesek.

TERV

- * Módszertani megjegyzés: miért jó megoldhatatlan(nak tűnő) kérdésekkel foglalkozni?
- * A térfogalom fejlődésének gyors áttekintése
- * A tér szerkezete: matematikai és fizikai megközelítések
- * Általános észrevételek

Egy módszertani megjegyzés

Miért jó „megoldhatatlan” kérdésekkel foglalkozni a fizikában (ill. általában a természettudományokban)?

- Állandóság: egy nehéz és lényeges kérdés izgalmas és időtálló (pl. hogyan keletkezett az élet?), míg a válaszok gyakran lehangolóak és átmenetiek (pl. a Miller–Urey-kísérlet);
- Szervező erő: egy nehéz és lényeges kérdés folyamatos jelenlétével segít megőrizni egy tudományterület mélységét, integritását, frissességét;
- Figyelmeztetés: a tudomány és a technika ún. „folyamatos előrehaladása” mint látszólagos élmény.

A térfogalom fejlődésének rövid története

Görögök: látszólag a sík és a tér szisztematikus tanulmányozása (is) a görögökkel vette kezdetét (**geometria**, összegzés: **Alexandriai Euklidész**, i.e. 300 körül). De a görög matematika (talán a polisz építészetének, ill. általában életének „itt és most” jellege miatt) inkább a sík- és térbeli konkrét dolgokat (körök, háromszögek, sokszögek, stb.) és viszonyaikat (pl. egy sík és egy kúp lehetséges metszetei, stb.) vizsgálta. Maga a tér, a létező dolgok közti „üresség” nem volt vizsgálat tárgya mert nem létezett (**apeiron**). Ugyanakkor: inkommenzurábilis arányok (irracionális számok) okozta problémák felbukkanása.

Középkor: a bonyodalmak kibontakozása (Walter de Chatton, Harclay-i Henry, Robert Grosseteste, Richard Kilvington, Thomas Bradwardine, Ockham-i William, Wodeham-i Adam, skolasztika XII-XIII. sz.): előállhat-e a kontinuum diszjunkt dolgok uniójaként? ha igen, akkor a tér pontokból vagy kiterjedésekből áll? érintkeznek-e a szomszédos pontok vagy kiterjedések egymással vagy sem? véges vagy végtelen sok ilyenből áll a tér? létezhetnek-e különböző méretű végtelenek? stb. stb.

Barokk: a tér mint önálló létező (önálló tulajdonságokkal) megjelenése mind a matematikában (a geometriai pont és koordinátái: **Descartes** 1637, differenciál- és integrálszámítás születése: **Leibniz** ~1673, **Newton** ~1665) mind a fizikában (**Newton** 1687 szerint a fizikai tér létezik: **inercia-erők**). A tér szerkezetét tekintve **kiterjedés nélküli pontokból álló végtelen lineáris tér** és létezését tekintve **abszolút**: a tér (az idővel együtt) pontok együttese és megadja (az idővel együtt) az anyag általános működési kereteit; viszont az anyag viselkedése nem befolyásolja a teret és az időt (nincs visszahatás). Tehát ez még a tér, az idő (mint metafizikai létezők) és a fizikai anyag (mint fizikai létező) teljes fogalmi szétválasztása.

Megjegyzés: **Bach** zenéje és az absztrakt tér.

Klasszikus kiteljesedés: a matematikai kontinuum precíz definíciója (**Dedekind** 1858), a modern térfogalom kialakulása (**Gauß**, **Riemann** 1868) klasszikus tulajdonságaival (pl. **dimenzió**, görbület) együtt és az általános relativitás-elmélet születése (**Einstein**, **Hilbert** 1915). A tér (és az idő) továbbra is pontokból áll, viszont bizonyos geometriai tulajdonságait (görbület) már a benne lévő fizikai anyag is befolyásolja. A tér és az idő mint téridő matematikai szempontból egy **kiterjedés nélküli pontokból álló 4 dimenziós görbült kontinuumot** alkot, fizikai szempontból pedig egy fizikai erőteret (mezőt): a **gravitációt** (hasonló az elektromágnességhez). A téridő létezése tehát immár a fizikai anyaggal megegyezően szintén fizikai.

A zavar kezdete 1: a nemrelativisztikus kvantum-elmélet születése (Planck 1900, Bohr 1913, Heisenberg 1925, stb. stb.). Ha a téridő nagybani szerkezetének kirajzolói a távoli galaxisok (csillagászat, általános relativitás-elmélet), akkor arról kicsiben a nagyenergiájú részecskefizikai történések tudósítanak (részecskefizika, kvantum-elmélet).

- Egy elemi részecske (pl. elektron) helyzetének (x) és impulzusának (sebességének, p) mérési bizonytalanságai (Δ) között a nemrelativisztikus kvantummechanika szerint fennáll a Heisenberg-féle **határozatlansági reláció**:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar .$$

Hogyan állhat a fizikai téridő pontokból?

- A nemrelativisztikus kvantummechanika szerint a téridő különböző helyein tartózkodó részecske-párok viselkedése korrelációt mutathat (összefonódás, EPR-jelenségek).

Hogyan lehetnek a fizikai téridő pontjai egymástól teljesen függetlenek?

A zavar kezdete 2: a matematika alapjaival kapcsolatos problémák (Cantor 1878, Gödel 1931, Turing 1936, Kolmogorov 1963, stb. stb.)

- Ha a geometriai kontinuum végtelen sok pontból áll, akkor minden geometriai térnek (függetlenül a „méretétől”, „alakjától”, dimenziójától stb.) ugyanannyi pontja van és ezek számossága biztosan meg kell haladja a természetes számok összességének számosságát (Cantor);
- Viszont, hogy mennyi is a kontinuum pontjainak száma, nem dönthető el a szokásos matematika keretein belül (Gödel, Cohen). A kontinuum egy generikus x pontja semmilyen véges eljárással (effektív matematikai tevékenységgel) nem izolálható (Turing, Kolmogorov).

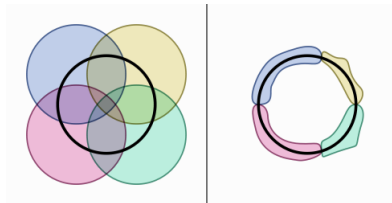
Akkor hogyan állhat a matematikai kontinuum pontokból?

Matematikai és fizikai leírások

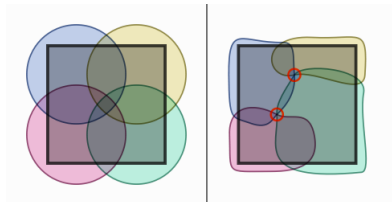
Mi a dimenzió? Matematikai megközelítés: ha a különféle tereket pontjaik száma nem különbözteti meg egymástól, akkor mi az első legegyszerűbb tulajdonság, ami igen? Pl. a fedési dimenzió (**Lebesgue**, **Čech** 1921): egy bonyolult X teret fedjünk le hézagmentesen egyszerű (értsd: kicsi nyílt) halmazokkal és számoljuk meg, hogy valamely $x \in X$ pontja hány fedőhalmazban van benne. Ha találunk egy fedési számot, amely tovább sehogysé csökkenthető, pontosabban valamely n számra elkerülhetetlenül mindig lesz legalább egy olyan $y \in X$ pont, amely $n + 1$ fedőhalmazban van benne, akkor azt mondjuk, hogy az X **absztrakt matematikai tér** (fedési) **dimenziója** n . Jelölés: $\dim X = n$.

Tulajdonság: $\dim X$ nem változik az X **folytonos** deformációival szemben, így a $\dim X = 0, 1, 2, \dots$ szám egy tereket egymástól megkülönböztető **topologikus invariáns**.

Példák:



A körvonal fedési dimenziója 1 (a kép forrása: Wikipedia).



A négyzet fedési dimenziója 2 (a kép forrása: Wikipedia).

Vizsgáljuk meg: mitől specifikus egy adott dimenzió? Általános tapasztalat: az érdekes tulajdonságok a dimenzió növekedésével eltűnnek ill. „beállnak”: **stabilizáció**. Egyszerű (de nem igazán érdekes) példák amikor $X = \mathbb{R}^n$ (tehát $\dim X = n$):

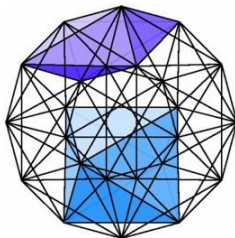
Dimenzió	Egységgyolyó térfogata	Szabályos testek száma
1	$2 = 2$	1
2	$\pi \approx 3,14$	∞
3	$\frac{4\pi}{3} \approx 4,19$	5
4	$\frac{\pi^2}{2} \approx 4,93$	6
5	$\frac{8\pi^2}{25} \approx$ 5,26	3
6	$\frac{\pi^3}{6} \approx 5,16$	3
7	$\frac{16\pi^3}{105} \approx 4,72$	3
...	...	...

Megjegyzés: az öt szabályos test 3 dimenzióban jól ismert:



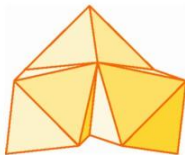
A 3 dimenziós szabályos testek (a kép forrása: internet).

Ezek szokásos induktív továbbépítéseivel kapunk öt szabályos testet 4 dimenzióban. De hogyan néz ki a hatodik szabályos test, az ún. 24-cella? Így:



A 4 dimenzós 24-cella egyik 3 dimenziós vetülete
(a kép forrása: internet).

Egy 24-cellát kapunk, ha 24 db 3 dimenziós oktaédert
„hézagmentesen” összeragasztunk úgy, hogy mindegyik él mentén
3 oktaéder találkozzon:



Oktaéderek illeszkedése a 24-cella 3 dimenziós határán
(a kép forrása: internet).

Száz éves matematikusi tapasztalat: az alacsony dimenziós terek az érdekesek! Sőt éppen a **3-4** dimenziósak a legizgalmasabbak, mert ezek a leggazdagabbak bizonyos általános matematikai tulajdonságokban! Érdekes, hogy a modern matematika pont eltalálni látszik a fizikai tér(idő) dimenzióját!

Veszélyek: lehet, hogy a stabilizációs jelenség oka az, hogy nagyon általánosnak vélt kérdéseink végül is a szokásos háromdimenziós szemléletből fakadnak?

Mi a dimenzió? Fizikai megközelítés: egy fizikai szituációban az alapvető független paraméterek száma. Példa: tapasztalat alapján egy térben szabadon mozgó tömegpont helyzetének megadásához pontosan **3 független adat** kell (koordináták) és sok lényegesen különböző tapasztalat (pl. a Naprendszer stabilitása, az elemi részecskék stabilitása-bomlékonysága, a Mengyelejev-féle periódusos rendszer szerkezete, sőt a fehérjék élettani tulajdonságai! stb.) egységesen erre az eredményre vezet. Ez nagyon meglepő és valahogy a „dolgok sokféleségével ugyanakkor állandóságával” függhet össze. Tehát a **fizikai tér tapasztalati dimenziója 3**.

Száz éves fizikusi törekvés: a 3 dimenziós fizika túl bonyolult és szerteágazó. A sokféle fizikai elmélet **papíron** egységesíthető, vagyis közös fogalmi-technikai apparátussal megfogalmazható, ha növeljük a bennük szereplő alapvető paraméterek számát (vagyis a fizikai tér dimenzióját formálisan növeljük). Ezek a divatos magasabb dimenziós egyesített elméletek (pl.

Kaluza–Klein-elmélet, tvisztor-elmélet, szuperszimmetrikus húrelméletek, M - és F -elméletek, stb. stb.). Ezek tükrében a kb. **10-11-12** dimenziós terek lennének az érdekesek. Meglepő, hogy nincs egyezés a tér(idő) tapasztalati dimenziójával!

Veszélyek: Semmiféle kísérleti tapasztalat nem utal magasabb dimenziók meglétére; a dimenzió növekedésével az egyenletek ismeretlen megoldásainak a száma is rohamosan nő ill. a már ismert megoldások instabillá válnak (l. **Ehrenfest** 1917 analízisét a Naprendszer stabilitásáról magasabb dimenzióban).

Láthatóan a matematikai és a fizikai megközelítés meglehetősen különbözik egymástól. (De a matematikában is lehet a dimenziót paraméterszámlálással definiálni.)

Általános észrevételek

Mi tehát a „fizikai tér”, amelyről a matematikusok és a fizikusok oly sok különbözőt (de azért hasonlót is) állítanak? A filozófiában (és így a matematikában és a fizikában is) egy dolog megnevezése helyettesíthető (összes) tulajdonságainak precíz felsorolásával. Mik a fizikai tér tulajdonságai? Különböznek-e ezek a matematikai kontinuum tulajdonságaitól?

- Tulajdonsága-e a fizikai térnek, hogy kiterjedés nélküli pontokból áll? Már korábban láttuk, hogy ez (a feltételezett tulajdonság) mind fizikai, mind matematikai szempontból nagyon problematikus. A relativisztikus kvantum-elmélet körüli gondok (Heisenberg–Pauli 1929, Dirac 1931, Feynman 1943, Landau 1951 stb. stb.) ezt tovább élezik:

a relativitás-elmélet szerint létezik maximális sebesség
(**fénysebesség, c**) ezért

$$\Delta p = m\Delta v \leq mc$$

és ezt behelyettesítve a fentebbi Heisenberg-relációba

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} \geq \frac{\hbar}{mc} .$$

Itt már sokkal élesebben látszik, hogy egy m nyugalmi tömegű elemi részecske túlságosan kicsi térbeli távolságokat ($\Delta x < \frac{\hbar}{mc}$) egyszerűen nem tud “realizálni” (egy túl kicsi Δx erőltetésére a természet **antianyag** „bedobásával” válaszol). A fizikai tér pontszerűsége tehát a relativisztikus kvantum-elmélet szerint még problematikusabb;

- Tulajdonsága-e a fizikai térnek, hogy vannak szimmetriái (távolságtartó transzformációi)? A matematikai tér invariáns tükrözésekkel szemben, a fizikai tér viszont nem. Ui. Léteznek olyan elemi részecskék, amelyeknek nincs tükröszimmetrikus párjuk (bizonyos radioaktív bomlási folyamatok nem invariánsak térbeli tükrözésekre). A fizikai tér tükrözési invarianciája tehát problematikus;
- Tulajdonsága-e a fizikai térnek, hogy van matematikai értelemben vett dimenziója? Vigyázni kell, mert túlságosan klasszikusnak tűnő fogalom, hiszen a folytonosságon alapul.

Nagyon kicsi méretekben a „fizikai tér” ill. az „elemi részecske” tulajdonságai közti különbségek egyre inkább elmosódnak, és valamiféle közös általánosítás lép a helyükbe: a **relativisztikus kvantummező-elméleti vákuum**...

Záró dialógus:

Kérdés: Mennyi?

Válasz: Három!

Kérdés: Mi három?

Válasz: Mi mennyi?

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

<https://math.bme.hu/~etesi/atomcsill.pdf>

Ajánlott irodalom:

- Alexandrov, P.Sz.: *A topológia egyszerű alapfogalmai*, Akadémiai, Budapest (1971);
- Boltyanskij, V.G., Jefremovics, V.A.: *Szemléletes topológia*, Tankönyvkiadó, Budapest (1977);
- Chinn, W.G., Steenrod, N.E.: *Bevezetés a topológiába*, Gondolat, Budapest (1980);
- Feynman, R.P.: *A fizikai törvények jellege*, Magvető, Budapest (1983);
- Gorelik, G.J.: *Miért háromdimenziós a tér?*, Gondolat, Budapest (1987);
- Vilenkin, N.J.: *A végtelen kutatása*, Tankönyvkiadó, Budapest (1988);
- Weinberg, S.: *Az első három perc*, Gondolat, Budapest (1982).