Matematika A4
13. gyakorlat

1. Konvolúció

Ha X és Y *diszkrét* valószínűségi változók, akkor $Z = X + Y$ eloszlását könnyedén ki tudjuk számolni.

$$P(X+Y=l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X=k, Y=l-k).$$

Ha függetlenek is, akkor

$$P(X+Y=l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X=k)P(Y=l-k).$$

Például ha X és Y két szabályos dobókockával dobott értéket jelöl, akkor a képlet szerint:

$$\begin{aligned} P(\text{dobások összege } = 8) = {} & P(X=2)P(Y=6) + P(X=3)P(Y=5) \\ & + P(X=4)P(Y=4) + P(X=5)P(Y=3) + P(X=6)P(Y=2) \end{aligned}$$

Ugyanilyen logikával számoltunk a félév elején.

Folytonos esetben is hasonló képletet kapunk. Ha X és Y függetlenek, továbbá X sűrűségfüggvénye $f(x)$, Y sűrűségfüggvénye $g(y)$, akkor $Z = X + Y$ sűrűségfüggvényét $h(z)$-vel jelölve:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx$$

Feladatok:

1. A számológépemmel generálok két véletlen számot $[0, 1]$-en, és összeadom őket. Írjuk fel az összeg eloszlásának sűrűségfüggvényét!

2. Számoljuk ki egy $[0, 2]$-n és egy $[0, 3]$-an egyenletes eloszlású valószínűségi változók összegének sűrűségfüggvényét.

3. Számítsuk ki két darab független λ_1 és λ_2 paraméterű Poisson eloszlás összegének eloszlását!

4. A binomiális eloszlás értelmezése alapján mutassuk meg, hogy egy binomiális(n, p) és egy tőle független binomiális(m, p) valószínűségi változó összege szintén binomiális, $n + m$ és p paraméterekkel.

5. Határozzuk meg két standard normális eloszlás konvolúcióját!

6. Számoljuk ki két λ paraméterű exponenciális eloszlás konvolúcióját! (Ezt nevezzük $GAM(\lambda, 2)$ eloszlásnak.)

7. Számoljuk ki egy λ_1 és egy λ_2 paraméterű exponenciális eloszlás konvolúcióját!

8. Számoljuk ki 3 db λ paraméterű exponenciális eloszlás konvolúcióját! *Útmutatás:* Kettőre már kiszámoltuk, konvolváljunk az eredményhez még egy λ paraméterű exponenciális eloszlást.

9. * Számoljuk ki n db λ paraméterű exponenciális eloszlás összegének eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! (Használjunk indukciót!)

2. Folytonos valószínűségi változók transzformációi

Az $y = a + bx$ egy *lineáris* transzformáció. Ha $Y = a + bX$ és X sűrűségfüggvénye $f(x)$, eloszlásfüggvénye $F(x)$, Y sűrűségfüggvénye $g(y)$, eloszlásfüggvénye $G(y)$, akkor:

$$G(y) = \begin{cases} F(\frac{y-a}{b}) & \text{ha } b > 0, \\ 1 - F(\frac{y-a}{b}) & \text{ha } b < 0; \end{cases} \qquad g(y) = \frac{1}{|b|} f(\frac{y-a}{b}).$$

Általánosabb eset: legyen X olyan folytonos valószínűségi változó, amely sűrűségfüggvénye egy (a, b) intervallumon pozitív, egyébként 0 (a lehet $-\infty$, b lehet ∞),továbbá legyen $Y = t(X)$. Ha a t függvény monoton növekvő vagy monoton csökkenő az (a, b) intervallumon, és t^{-1} folytonosan differenciálható, akkor

$$G(y) = F(t^{-1}(y)), \qquad g(y) = f(t^{-1}(y)) \left| \left[t^{-1}(y)\right]' \right|.$$

Feladatok:

10. Vegyük azt az X folytonos eloszlást, amelynek a sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x$ ha $x \in [0, 1]$, egyébként 0. Mi lesz az $Y = 3 + 5X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye? Hogyan változott a várható érték?

11. Van egy 25 óra várható értékű exponenciális eloszlás szerint kiégő égőnk. A barátommal a következő játékot játszuk: fizetek neki $25^2 = 625$ forintot, és ha kiég az égő, akkor ő kifizeti nekem az égő órákban mért élettartalmának négyzetét. Kinek előnyös a játék? Számoljuk ki a barátom által fizetett pénz eloszlását!

12. Legyen X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon. Határozzuk meg $x^{1/2}$, x^2, $x^{-1/2}$, x^{-1}, x^{-2} eloszlását. Hogyan változik a várható érték és szórás?

13. Egy villanykörte-gyár λ paraméterű exponenciális eloszlás szerint kiégő villanykörtét gyárt. A konkurens cég is tud λ paraméterű exponenciális szerint kiégőt gyártani, ezért hosszú kutatás után bevezetnek egy új eljárást, amely segítségével megháromszorozták az izzók élettartalmát. Milyen lett így az új izzók élettartalmának eloszlása?

14. Legyen X egy 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $Y = \ln(X)$ sűrűségfüggvényét.