

# Matematika A4

## VIII. gyakorlat

### 1. Többdimenziós diszkrét eloszlások

1. Először egy kockával dobunk, majd annyi érmével, ahányast a kockával dobtunk. Mi a valószínűsége, hogy a kockával 4-est dobunk és az érmékkel 2 fejet kapunk? Mi a valószínűsége, hogy 5 fejet kapunk?
2. Van 20 könyvem a polcon. Sorban elolvasom a címeiket, és mindegyik könyvet 0.6 valószínűséggel leviszem a polcra. A levett könyveket még átszelektálom, és mindegyiket 0.5 valószínűséggel eladom az antikváriumban. Adjuk meg az eladott könyvek számának eloszlását!
3. Vegyük azt a két dimenziós diszkrét eloszlást, aminek a valószínűségeit az alábbi táblázat határozza meg!

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0.1	0.2	0.2
2	0.1	0.2	0
3	0.1	0	0.1

- a) Mi a valószínűsége, hogy  $X = 2$  és  $Y = 1$ ?
- b) Mi a valószínűsége, hogy  $Y = 3$ ?
- c)  $X^2Y$  várható értéke?
- d) Feltéve, hogy  $Y = 3$ , mi  $X$  eloszlása?
- e) Független-e  $X$  és  $Y$ ?

### 2. Sűrűségfüggvény a síkon

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

- $f(x, y) \geq 0$ , minden  $x, y$  valós számra.
- 

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Az  $A$  tartományba esés valószínűsége:

$$P(A) = \iint_A f(x, y) dx dy$$

Feladatok:

4. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (Amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

a)

$$f(x, y) = \frac{4}{5}(x + xy + y) \quad , \quad \text{ha } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

b)

$$f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \quad , \quad \text{ha } x > 0, \quad y > 0$$

c)

$$f(x, y) = 4xy - 10 \quad , \quad \text{ha } x^2 + y^2 < 1$$

d)

$$f(x, y) = \frac{1}{x} \quad , \quad \text{ha } 0 < y < x < 1$$

5. Határozzuk meg  $c$ -t úgy, hogy  $f(x, y)$  sűrűségfüggvény legyen:

$$f(x, y) = cy \quad , \quad \text{ha } x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < 1.$$

6. Vegyük az  $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$  ( $x, y > 0$ ) sűrűségfüggvényt. Számítsuk ki az alábbi események valószínűségét:

a)  $0 < X < 1$  és  $0 < Y < 1$

b)  $1 < X < 5$  és  $2 < Y < 8$

c)  $0 < X < 1$

d)  $3 < Y < 5$

7. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót: Első koordinátája legyen egy véletlen szám:  $X = RND_1$ . A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen számmal:  $Y = RND_1 RND_2$ . Valamint definiáljuk a következő eseményeket:  $A = \{X > \frac{1}{2}\}$  és  $B = \{Y < \frac{1}{2}\}$ .

a) Határozzuk meg  $(X, Y)$  eloszlásfüggvényét, majd annak segítségével a sűrűségfüggvényét!

b) Az együttes sűrűségfüggvényből határozzuk meg  $X$  és  $Y$  perem-sűrűségfüggvényeit!

c)  $P(A)=?$

d)  $P(B)=?$

e)  $P(A \text{ és } B)=?$

f)  $P(A|B)=?$

g)  $P(B|A)=?$

8. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót: Első koordinátája legyen  $X = \sqrt{RND_1}$ . A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen számmal:  $Y = \sqrt{RND_1} \cdot RND_2$ .

a) Számoljuk ki e 2-dimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

b)  $P(Y < \frac{1}{4}) = ?$

c)  $P(Y < y) = ?$

### 3. Kétdimenziós valószínűségi változó függvényének várható értéke

A  $t(X, Y)$  valószínűségi változó várható értéke:

$$\mathbb{E}t(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) f(x, y) dx dy.$$

*Feladatok:*

9. Vegyük a következő kétdimenziós valószínűségi változót:

Első koordinátája legyen  $X = \sqrt{RND_1}$ . A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen szám négyzetgyökével:  $Y = \sqrt{RND_1} \cdot \sqrt{RND_2}$ .

- Számoljuk ki e kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
- Legyen  $t(x, y) = xy$ . Mennyi a  $t(X, Y)$  valószínűségi változó várható értéke?
- Legyen  $t(x, y) = xy^2$ . Mennyi a  $t(X, Y)$  valószínűségi változó várható értéke?

### 4. Feltételes eloszlás

Fontos az alábbi összefüggés:

$$P(c < Y < d | X = x) = \int_c^d f_{2|1}(y|x) dy = F_{2|1}(d|x) - F_{2|1}(c|x)$$

*Feladatok:*

- Legyen  $X$  a  $[0, 1]$ -en egyenletes,  $Y$  pedig az  $[X, 1]$ -en egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Mi az együttes sűrűségfüggvényük? Mi  $X$  várható értéke?
- Legyen  $f(x, y) = \frac{1}{x}$  ha  $0 < y < x < 1$ , egyébként 0. Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket:
  - $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.5) = ?$
  - $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.8) = ?$
  - $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = x) = ?$
  - $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = 0.1) = ?$
  - $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = 0.4) = ?$
  - $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = y) = ?$
- Legyenek  $X$  és  $Y$  független 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.
  - $P(X + Y < 3) = ?$
  - $P(X + Y < z) = ?$
  - $P(X + Y < 3 | X < 2) = ?$
  - $P(2 < X + Y < 3 | Y > 1) = ?$

## 5. Függetlenség

$X, Y$  valószínűségi változók  $f(x, y)$  közös sűrűségfüggvénnyel.  $X$  és  $Y$  pontosan akkor függetlenek, ha  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$  alakban áll elő. Ezzel ekvivalens megfogalmazások az alábbiak:

$$f_{2|1}(y|x) = f_2(y) \quad \text{illetve} \quad f_{1|2}(x|y) = f_1(x) \quad .$$

13. Függetlenek-e az alábbi együttes sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók?

- a)  $f(x, y) = \frac{1}{x}$  ha  $0 < y < x < 1$
- b)  $f(x, y) = 2$  ha  $0 < y < x < 1$
- c)  $f(x, y) = 1/2$  ha  $0 < x < 1$  és  $0 < y < 2$
- d)  $f(x, y) = 2e^{x+2y}$  ha  $0 < x$  és  $0 < y$

14. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x, y) = 24xy, \text{ ha } 0 < x, \quad 0 < y, \quad x + y < 1$$

- a) Független-e  $X$  és  $Y$ ?
- b)  $P(X < u, Y < v) = ?$ , ahol  $u, v > 0$  és  $u + v < 1$ .

15. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x, y) = 1, \text{ ha } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2(1 - x).$$

- a)  $P(X < x, 1 < Y < \frac{3}{2}) = ?$
- b) Független-e  $X$  és  $Y$ ?