Diszkrét véletlen struktúrák, BME, 2016 tavasz

Pete Gábor
http://www.math.bme.hu/~gabor

June 2, 2016

Hely és idő: péntek 12:15-13:45 H607.

1 Feb 19

1.1 A prímek véletlenszerűségéről

Hardy-Ramanujan (1920), Turán (1934), Erdős-Kac (1940). Ha $x \in \mathbb{N}$-re $\nu(x)$ jelöli az x különböző prímtényezőinek számát, akkor a következő CHT igaz [AS08, §4.2]:

$$\frac{1}{n}\#\left\{1 \leq x \leq n : \frac{\nu(x) - \ln\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}} < \lambda\right\} \to \Phi(\lambda)\,,$$

ahogy $n \to \infty$, ahol $\Phi(z)$ a standard normális eloszlásfüggvénye. Egy gyengébb verzióhoz második momentumokat számoltunk és a Csebisev-egyenlőtlenséget használtuk, a CHT-hez a k-adik momentumok is kellettek.

1.2 Még egy példa a momentum-módszerre

Egy $G(V, E)$ véges gráfnak a $V \times V$ által indexelt szimmetrikus 0-1 adjacencia-mátrixa legyen A. Vegyük észre, hogy az A^k hatvány (i, j) eleme pontosan a k hosszú $i \to j$ séták száma. Másrészt, ha veszünk az A mátrix $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{|V|}$ sajátértékeiből egyet uniform véletlen módon, legyen ez σ_A, akkor ennek a k-adik momentuma:

$$\mathbf{E}[\sigma_A^k] = \frac{1}{|V|}\sum_{i=1}^{|V|}\lambda_i^k = \frac{1}{|V|}\mathrm{Trace}(A^k)\,,$$

hiszen a mátrix-diagonalizálás nem változtatja meg a nyomot.

Most tegyük föl, hogy $G_n(V_n, E_n)$ véges d-reguláris gráfoknak egy lokálisan fa-szerű sorozata, azaz azt tudja, hogy minden k-ra azon csúcsok aránya V_n-ben nullához tart, melyek körül a k sugarú gömb nem izomorf egy d-reguláris fában a k sugarú gömbbel. (Látni fogjuk például, hogy egy uniform véletlen d-reguláris gráf n csúcson az nagy valószínűséggel ilyen.) Ilyenkor az $\frac{1}{|V_n|}\mathrm{Trace}(A(G_n)^k)$ normalizált nyom konvergálni fog a d-reguláris fában egy adott csúcsból induló k hosszú zárt séták számához.

Ebből következik, hogy a $\sigma_{A(G_n)}$ eloszlásban is konvergál valamihez. Ez egy szép sima sűrűségfüggvénnyel bíró $\sigma_{\mathbb{T}_d}$ valváltozó, aminek az eloszlását a d-reguláris fa Kesten-McKay spektrálmértékének nevezik. Hogy ez pontosan mi, az most mindegy; a lényeg, hogy ezek szerint egy nagy gráf sajátérték-eloszlása lényegében csak a gráf lokális struktúrájától függ, ami egy érdekes jelenség.

Mellesleg, amint $d \to \infty$, a $\sigma_{\mathbb{T}_d}/\sqrt{d}$ valváltozó tart a Wigner-féle félkör-eloszláshoz.

2 Feb 26

2.1 Ramsey számok

Fölső becslés: $R(k,\ell) \le R(k-1,\ell) + R(k,\ell-1)$. Ebből azt kapjuk, hogy

$$R(k,\ell) \le \binom{k+\ell-2}{k-1} \quad \text{és} \quad R(k,k) \le C\frac{4^k}{\sqrt{k}}. \tag{2.1}$$

Itt ugye a $\binom{2k}{k}/4^k \asymp 1/\sqrt{k}$ nagyságrendet az 1-dimenziós bolyongásra vonatkozó lokális CHT-ből rögtön lehet látni, ha valaki nem emlékezne a Stirling-formulára.

Alsó becslés [AS08, §3.1]: minden n-re és p-re,

$$R(k,\ell) > n - \binom{n}{k}p^{\binom{k}{2}} - \binom{n}{\ell}(1-p)^{\binom{\ell}{2}}. \tag{2.2}$$

$$R(k,C_{\le\ell}) > n - \binom{n}{k}p^{\binom{k}{2}} - \sum_{j=3}^{\ell}\frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{2}(1-p)^j. \tag{2.3}$$

Az elsőben, $k=\ell$ esetén $p=1/2$ a logikus választás, és $R(k,k) \ge c2^{k/2}k$-et kapunk. Ez messze van (2.1)-től, de ez van, lényegesen jobb nem ismert egyik oldalról sem.

Ha ℓ pici fix, és k nagy, akkor persze $1-p$-t kicsinek érdemes választani. Valóban, tetszőleges $\epsilon > 0$-hoz, ha $\delta > 0$ elég kicsi, akkor $1-p = n^{-\frac{2}{\ell}-\delta}$ és $n = k^{\frac{\ell}{2}-\epsilon}$ választással az (2.2)-beli második kivonandó tag $o(n)$, továbbá $1-p = k^{-1+\tilde\epsilon}$, $\tilde\epsilon > 0$ miatt az első kivonandó tag $o(1)$. Tehát $R(k,\ell) \ge k^{\frac{\ell}{2}+o(1)}$. Az a sejtés, hogy $k^{\ell-1+o(1)}$ az igazság. Ez $\ell = 3$-ra ismert, fogunk rá látni egy Lovász Lokális Lemmás bizonyítást [Spencer 1977]; sőt, a pontos $o(1)$ tag is ismert: $R(k,3) \asymp k^2/\log k$, ahol [Ajtai-Komlós-Szemerédi 1980] a fölső, és [Kim 1995] az alsó becslés.

Hasonlóképpen, tetszőleges $\epsilon > 0$-hoz, ha $\delta > 0$ elég kicsi, akkor $p = 1 - n^{-\frac{\ell-1}{\ell}-\delta}$ és $n = k^{\frac{\ell}{\ell-1}-\epsilon}$ választással az (2.3)-beli második kivonandó tag $o(n)$, továbbá $1-p = k^{-1+\tilde\epsilon}$, $\tilde\epsilon > 0$ miatt az első kivonandó tag $o(1)$. Tehát $R(k,C_{\le\ell}) \ge k^{\frac{\ell}{\ell-1}+o(1)}$. Ez azért érdekes, mert ezek szerint léteznek G gráfok n csúcson

$$\mathsf{girth}(G) > \ell \quad \text{és} \quad \chi(G) \ge \frac{n}{\alpha(G)} \ge n^{\frac{1}{\ell}+o(1)}$$

paraméterekkel, tehát a kromatikus szám egyáltalán nem lokális: minden pont egy nagy környezete 2-színezhető, és mégis χ nagy. [AS08, Lens 3].

A hallgatóságnak eszébe jutott egy Noga Alon cikk: `http://www.tau.ac.il/~nogaa/PDFS/tough.pdf`, de még nem néztem meg.

2.2 Hipergráfok kétszínezhetősége

Hipergráfok csúcsait akarjuk jólszínezni, hogy ne legyen monokromatikus él. Legyen $m(n)$ a legkisebb szám, amire létezik n-uniform nem-2-színezhető hipergráf ennyi éllel. Tétel: $2^{n-1} < m(n) < Cn^2 2^n$. Mindkét korlátot valszám módszerrel bizonyítottuk [AS08, §1.3].

3 Március 4.

3.1 Független halmazok konstruálása gráfokban

Ha n csúcson d az átlagfokszám, akkor primitív ötlettel $\alpha(G) \ge np - \frac{nd}{2}p^2$, ami $p = 1/d$ választással $\alpha(G) \ge \frac{n}{2d}$-t ad. [AS08, §3.2]

Egy fokkal kevésbé primitíven, ha $S := \{v \in V : U_v > U_w \ \forall v \sim w\}$, ahol U_v iid $\mathsf{Unif}[0,1]$ címkék, akkor ez egy független halmaz, és $\mathbf{E}|S| = \sum_{v\in V} \frac{1}{d_v+1}$, így létezik ekkora S. Ebből könnyen következik az $\mathsf{ext}(n, K_k)$-ról szóló Turán-tétel. [AS08, Lens 6]

Megjegyzés: Legyen $G_{n,d}$ az uniform véletlen d-reguláris gráf n csúcson. Ismert, hogy $\alpha_d := \lim_n \alpha(G_{n,d})/n$ létezik [Bayati-Gamarnik-Tetali 2010], szigorúan kisebb 1/2-nél minden $d \geq 3$-ra [Bollobás 1981], nagy d-re $\alpha_d \sim 2(\log d)/d$ [Frieze-Łuczak 1992], és $0.4361 < \alpha_3 < 0.45537$ [Csóka-Gerencsér-Harangi-Virág 2013]. Utóbbi alapötlete, hogy egy iid mező lokális maximumai helyett valami jobb mezőt kellene venni, pld a bolyongás Markov-operátorának egy sajátvektorát, talán látunk majd még ilyesmit.

3.2 Lovász Lokális Lemma

Kimondtuk és bizonyítottuk a LLL-t, általános és szimmetrikus alakban, lásd [AS08, §5.1].

A szimmetrikus alak egy azonnali következménye, hogy ha egy n-uniform hipergráf minden éle legfeljebb d másik élt metsz, és $e(d+1) \leq 2^{n-1}$, akkor az élek 2-színezhetőek [AS08, Thm 5.2.1]. Azaz a §2.2-beli állítás úgy is igaz marad, ha csak lokálisan olyan a hipergráf, mint ott az egész hipergráf volt, egy e faktornyi gyengítéstől eltekintve.

Ramsey számok alsó becslésére a következő órán használjuk.

4 Március 11.

4.1 $R(k,3)$ Ramsey számok és független ponthalmazok

Láttuk a Ramsey számokról, hogy fix ℓ és $k \to \infty$ esetén $R(k,\ell) \geq k^{\ell/2+o(1)}$. A Lokális Lemma általános alakjával azt lehet bizonyítani [Spencer 1977], hogy

$$R(k,\ell) \geq k^{\frac{\binom{\ell}{2}-1}{\ell-2}+o(1)},$$

ami $\ell = 3$-ra már lényegében egyezik az igazsággal; konkrétan $R(k,3) \geq ck^2/\log^2 k$ jön ki. A paraméterek optimalizálását nem csináljuk meg, de az alapötlet világos kell, hogy legyen; lásd [AS08, §5.3].

Láttuk, hogy ha d az átlagfok, akkor $\alpha(G) \geq n/(d+1)$, és fölsejlett, hogy háromszögmentes gráfokra ennél erősebb is igaz kell, hogy legyen. Valóban, ha d a maxfok, és G háromszögmentes, akkor $\alpha(G) \geq (n \log d)/(8d)$, lásd [AS08, Lens after Appendix A].

Ebből pedig könnyen következik az [Ajtai-Komlós-Szemerédi 1980] fölső korlát: $R(k,3) \leq ck^2/\log k$.

4.2 Véges gráfok lokális gyenge konvergenciája

Ha már előjött kétszer is megjegyzésként a véletlen reguláris gráf $G_{n,d}$, akkor most rendesen is fogunk vele foglalkozni kicsit. Az első állítás az lesz, hogy a gráf "lokálisan fa-szerű". Ennek az általános definíciója: véges gráfok Benjamini-Schramm konvergenciája; lásd [BS01], illetve [Pet15, Chapter 14].

5 Március 18.

5.1 Gráfok lokális konvergenciája: unimodularitás

Még pár szó véges gráfok lokális gyenge konvergenciájáról: a limeszben kapott véletlen gyökeres gráf mindig ún. unimoduláris. Visszafelé ez nem ismert: Misha Gromov és Benjy Weiss egy híres csoportelméleti kérdésének általánosítása, Aldous és Lyons [AldL07] által, hogy vajon minden unimoduláris véletlen gráf előáll-e véges gráfok BSch-limeszeként.

Unimoduláris véletlen gyökeres gráfok fő forrásai:

1) Véges gráfok uniform gyökérrel, illetve véges gráfok BSch-limesze.

2) Tranzitív unimoduláris gráfok. Vigyázat: habár minden Cayley gráf unimoduláris, van végtelen tranzitív gráf (pld a nagymama-gráf), ami nem unimoduláris.

3) Tranzitív unimoduláris gráfon invariáns perkolációban az origó fürtje.

Lásd [Pet15, Chapter 14] további infóért.

6 Március 25.

6.1 Néhány példa invariáns csúcs- és él-perkolációra

Bernoulli(p) független perkoláció.

Annak kimondása, hogy az uniform véletlen feszítőfát (Uniform Spanning Tree) véges gráfokon lehet generálni David Wilson algoritmusával, körtörölt bolyongások (Loop-Erased Random Walk) segítségével.

Free és Wired Uniform Spanning Forest definiálása végtelen gráfokon, mint véges véletlen fák gyenge limesze. Annak kimondása, hogy Wilson algoritmusa a WUSF-ot generálja. Nemtriviális következmény: $\mathbb{Z}^d$-ben $d = 1, 2, 3, 4$-re egyetlen fa a WUSF, $d = 5, 6, 7, 8$-ra végtelen sok fa van, de bármely kettő érinti egymást, etc. [BKPS04]

Lásd [Pet15, Chapter 12], [LP15, Chapters 7, 4, 10].

6.2 Amenabilitás, térfogat-növekedés

Egy gráf amenabilitásának, Cheeger-konstansának definíciója: véges részhalmazokra a határ per térfogat uniforman pozitív-e. Pld a reguláris fák nem-amenábilisak, a $\mathbb{Z}^d$ rácsok amenábilisak.

A $H \wr G$ lámpagyújtogató gráfok definíciója, ahol G a város, H a lámpa-gráf, tipikusan G végtelen, H véges. Van egy speciális $o \in V(H)$ csúcs, amire úgy gondolunk, hogy a lámpa nem ég; a többi csúcs különböző színeket jelképez. A csúcshalmaz a (ϕ, λ) párokból áll, ahol $\phi : V(G) \longrightarrow V(H)$ egy lámpakonfiguráció, amiben $\{x \in V(G) : \phi(x) \neq o\}$ véges, és $\lambda \in V(G)$ a lámpagyújtogató helye. A szomszédsági reláció: a lámpagyújtogató léphet egyet $E(G)$ mentén, vagy állíthat a λ-beli $\phi(\lambda)$ lámpán $E(H)$ mentén.

Ha G és H is tranzitív, akkor $H \wr G$ is az. Ha csoportok Cayley gráfjai, akkor a $H \wr G$ gráf a $H \wr G = \oplus_G H \rtimes G$ koszorúszorzat egy Cayley-gráfja, de az algebrába nem mentünk bele. Ami a lényeg, hogy a $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$ gráf könnyen láthatóan exponenciális térfogatnövekedésű, de mégis amenábilis.

Minderről lásd [Pet15, Chapter 5].

6.3 Kvázi-izometriák metrikus terek között

Kvázi-izometria definíciója. **Pld 1**: $\mathbb{Z}$ és a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ létra kvázi-izometrikusak. **Pld 2**: Tetszőleges végesen generált csoport két különböző véges generátor-rendszeréhez tartozó Cayley-gráfjai kvázi-izometrikusak. **Pld 3**: $\mathbb{R}^d$ és $\mathbb{Z}^d$ kvázi-izometrikusak.

Kimondtuk, könnyű gyakorlat, hogy amenabilitás, exponenciális térfogatnövekedés, d-edfokú polinomális térfogatnövekedés, ezek kváziizometria invariáns tulajdonságok.

A Diestel-Leader $\mathrm{DL}(p,q)$ tranzitív gráfok definiálása. Annak kimondása, hogy $\mathrm{DL}(p,p)$ a $\mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}$ lámpagyújtogató csoport egy természetes Cayley-gráfja. Könnyű látni, hogy $p \neq q$ esetén $\mathrm{DL}(p,q)$ nem-unimoduláris. Sokkal nehezebb tétel [EFW07]: ha $p \neq q$, akkor $\mathrm{DL}(p,q)$ még csak nem is kvázizometrikus semmilyen Cayley-gráfhoz.

Minderről lásd [Pet15, Chapters 3 and 5].

7 Április 1.

Az amenabilitás különböző definíciói. Eddig volt Følner-Cheeger geometriai definíció.

7.1 Amenabilitás és átlagolás

[John von Neumann, 1929]: invariáns közepelés és invariáns majdnem-mérték léte: minden korlátos függvényre akarunk átlagot definálni, minden részhalmazra akarunk sűrűséget definiálni, lineáris és invariáns módon.

Ha van egy $\{F_n\}$ Følner-sorozatunk, és egy, a kiválasztási axiómát használó Banach-limesz LIM fogalmunk, akkor

$$\mu(S) := \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} \frac{|S \cap F_n|}{|F_n|}$$

jó lesz.

És viszont, de ezt egyáltalán nem láttuk, ha nem-amenábilis egy tranzitív gráf, akkor ilyen invariáns közép létezése kizárt rajta [Følner 1955].

Lásd [Pet15, Section 5.2].

7.2 Amenabilitás, bolyongások, Markov-operátor

A reverzibilis Markov-láncok pontosan azok, akiket egy szimmetrikusan élsúlyozott gráfon való bolyongással elő lehet állítani.

Ha adott egy P Markov-lánc, egy π stacionárius mértékkel, akkor a P, mint Markov operátor az $\ell^2(V,\pi)$ téren, az pontosan akkor önadjungált, ha a (P,π) egy reverzibilis pár.

Lemma, hogy $\|P\| \leq 1$. Véges állapottéren persze $\|P\| = 1$.

És akkor egy bolyongásos karakterizációja az amenabilitásnak (Kesten '59, Cheeger '70, Dodziuk '84, Mohar '88): egy szimmetrikusan élsúlyozott gráf pontosan akkor nem-amenábilis, ha $\|P\| < 1$. Ami, a spektrál-sugár tételt és egy kis érvelést használva:

$$\|P\| = \rho(P) = \limsup_{n\to\infty} \|P^n\|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} p_n(x,x)^{1/n} < 1.$$

(Ez x-től nem függ, semmilyen összefüggő gráfban.)

Lásd [Pet15, Sections 6.1 and 7.1].

8 Április 8.

Bemelegítésként $\theta(p)$ definíciója, és annak igazolása, hogy felülről félig folytonos. Nehezebb (nem is bizonyítottuk), hogy tranzitív gráfon esetleg p_c kivételével folytonos is. Sejtés, hogy tranzitív gráfokon mindenhol folytonos, azaz $\theta(p_c) = 0$. Martingál konvergencia tétellel annak bizonyítása, hogy a kritikus Galton-Watson fák kihalnak, és így a d-reguláris fán $\theta(1/(d-1)) = 0$.

8.1 Amenabilitás és Bernoulli perkoláció

Bernoulli perkoláció tranzitív végtelen gráfokon ergodikus.

Végtelen fürtök száma tranzitív gráfokon egy majdnem biztos konstans, ami 0 vagy 1 vagy ∞.

Burton-Keane tétel (1989): amenábilis tranzitív gráfon kizárt a végtelen sok végtelen fürt. Fordítva csak egy Benjamini-Schramm sejtés.

Minderről lásd [Pet15, Section 12.1].

8.2 Amenabilitás és invariáns perkolációk

Egy invariáns perkolációs karakterizációja az amenabilitásnak [BLPS99]. Egyelőre az egyik irány volt: amenábliis Cayley gráfon minden $\epsilon > 0$-hoz létezik invariáns csúcs-perkoláció, amiben a csúcs-marginális legalább $1 - \epsilon$, mégis csak véges fürtök vannak.

9 Április 15.

9.1 Nem-amenabilitás, unimodularitás, invariáns perkolációk

Végre kiderül az unimodularitás szerepe: tömegküldési elv (Mass Transport Principle). Cayley gráfokra pld igaz az MTP.

Következmények és anti-következmények:

1) Nem lehet végtelen fürtökben egyetlen speciális csúcsot invariánsan kijelölni.

2) Az előző óra végi BLPS tétel másik iránya a nem-unimod nagymama gráfra nem igaz.

3) Amolyan ergodtétel-szerű átlagolás működik, a térbeli és a valószínűségi átlagot össze lehet kötni. Erre egy jó példa a BLPS tétel másik iránya, nem-amenábilis unimoduláris tranzitív gráfokra.

Lásd [BLPS99] és [Pet15, Section 12.2].

9.2 Egy érdekes példa, ami ráadásul egy factor of iid folyamat

Példa, hogy a 3-reguláris fára a BLPS tétel által mondott 2/3 élsűrűség supremum, hogy ne legyenek véges fürtök, az éles: az egyetlen invariáns véletlen teljes párosítás komplementere az $\mathbb{Z}$ kópiákból áll.

"Factor of iid" folyamatok definíciója. Nagyon nem nyilvánvaló, de igaz [LN11]: a fenti invariáns véletlen teljes párosítás az fiid.

10 Április 22.

10.1 Lokálisan tesztelhető gráfparaméterek

Ha korlátos fokú gráfokra egy $G \mapsto \phi(G)$ gráf-paraméter folytonos a Benjamini-Schramm lokális topológiában, azaz $G_n \xrightarrow{\text{BSch}} (\mathcal{G}, o)$ esetén $\phi(G_n)$ konvergál, akkor az lokálisan tesztelhető: minden $D < \infty$ és $\epsilon > 0$ esetén létezik $N(\epsilon, D)$ és $K(\epsilon, D)$ végesek, hogy ha G egy tetszőleges véges D max-fokú gráf legalább N csúcson, akkor K darab uniform véletlen csúcsnak megnézve a K sugarú környezetét G-ben, ezen környezetek alapján (ami csak korlátos sok infó) tudunk egy ϕ^* tippet mondani, ami a $\phi(G)$-nek ϵ sugarú környezetében lesz legalább $1-\epsilon$ valószínűséggel. (Ha nem világos, miért, gondold át! Kompaktság!)

Láttuk, hogy a spektrálmérték lokális. Van néhány gráfparaméter, amiknek meglepő módon köze van a spektrumhoz, pld a fa-entrópia [Lyo05]. És pld a max párosítási arány is lokális [EL10, CsF16]. De a függetlenségi arány nem az, mint a véletlen d-reguláris páros $G_{n,n,d}$ illetve nempáros $G_{2n,d}$ esete mutatja, amint az most jön.

Továbbra is lásd [Pet15, Chapter 14] több infóért, illetve [EL10].

10.2 A véletlen reguláris gráf $G_{2n,d}$

Bebizonyítottuk, hogy a $G_{2n,d}$ nagy valószínűséggel:

1) lokálisan fa-szerű, de ennek ellenére

2) a legnagyobb független csúcshalmaz sűrűsége 1/2-nél szigorúan kisebb [Bol81].

3) És, expander: a Cheeger- avagy izoperimetrikus konstansa uniforman pozitív [Pin73].

Az utolsóra valójában nem maradt idő, de egyszerű: inkább $G_{n,n,d}$-ben dolgozva, ki kell számolni az olyan $(S,T) \subset [n] \times [n]$ részhalmaz-párok várható számát, S a jobb, T a bal oldalon, $|S| < n/2$ és $|T| < (1+c)|S|$, ahol S összes szomszédja, d független teljes párosítást követve, T-ben van. Ha c elég kicsi, akkor ez kicsi lesz, így annak a valószínűsége, hogy van ilyen, 0-hoz tart. Ebből könnyen következik, hogy $G_{n,n,d}$ nagy valószínűséggel expander.

11 Április 29.

A Kesten-Cheeger tétel nehezebbik irányát, hogy nem-amenabilitásból következik $\|P\| < 1$ és $p_n(x,x) < \exp(-cn)$, egyáltalán nem bizonyítottuk. Most fogjuk, egy véges Markov láncokra is működő módszerrel (pld: n csúcsú expanderen az L^∞ keverési idő $O(\log n)$, a legkisebb, ami lehet), és sokkal általánosabban is, pld: d-dimenzós izoperimetriából következik, hogy $p_n(x,x) < cn^{-d/2}$. Erre több módszer van, mi a gyönyörű Morris-Peres evolving sets technikával csináljuk. Lásd [MP05] és [Pet15, Chapter 8].

11.1 Keverési idők fajtái

L^p-távolság $p_n(x,\cdot)$ és stacionárius $\pi(\cdot)$ között:

$$\left\| \frac{p_n(x,\cdot)}{\pi(\cdot)} - 1 \right\|_{L^p(\Omega,\pi)} = \left(\sum_{y\in\Omega} \left(\frac{p_n(x,y)}{\pi(y)} - 1 \right)^p \pi(y) \right)^{1/p}.$$

A két leggyakoribb változat a $p = \infty$, ez a legerősebb, illetve a $p = 1$, aminek természetes valszámos tartalma van, ugyanis lényegében a teljes variációs távolsággal egyezik: ha μ és ν két valszámmérték Ω-n, akkor

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) := \sup\left\{|\mu(A) - \nu(A)| : A \subset \Omega\right\} = \frac{1}{2}\sum_{x\in\Omega} |\mu(x) - \nu(x)|\,.$$

Az egyenlőséget elég könnyű látni, ha az $A = \{x \in \Omega : \mu(x) < \nu(x)\}$ halmazra ránézünk.

Ezekből L^p-keverési idő:

$$\tau_p(\epsilon) := \min\left\{n : \left\|\frac{p_n(x,\cdot)}{\pi(\cdot)} - 1\right\|_p < \epsilon \text{ minden } x \in \Omega \text{ kezdőpontra}\right\}.$$

Nem túl nehéz bizonyítani, de most nincs rá időnk, hogy $\tau_{\mathrm{TV}}(2^{-k}) \leq k\tau_{\mathrm{TV}}(1/4)$, emiatt általában $\tau_{\mathrm{TV}}(1/4)$-et szokták a TV-keverési időnek kinevezni. Hogy $\tau_{\mathrm{TV}}(1/2)$ még nem lenne jó definíció, arra példa két hurokélekkel kiegészített n csúcsú teljes gráf egy éllel összekötve: egy lépés alatt elérjük az $1/2$ távolságot, de utána $c_\epsilon n^2$ lépés kell, hogy $1/2 - \epsilon$-ra lemenjünk.

Még könnyebb bizonyítani, ha el nem néztem, hogy ha π reverzibilis, akkor

$$\left\|\frac{p_{n+m}(x,\cdot)}{\pi(\cdot)} - 1\right\|_\infty \leq \left\|\frac{p_n(x,\cdot)}{\pi(\cdot)} - 1\right\|_\infty \left\|\frac{p_m(x,\cdot)}{\pi(\cdot)} - 1\right\|_\infty,$$

tehát itt meg tetszőleges $\epsilon > 0$-ra elég $\tau_\infty(1-\epsilon)$-t becsülni. Az L^∞ keverést nem meglepő módon uniform keverésnek is szokták hívni.

11.2 Morris-Peres tétel kimondása

Izoperimetrikus profil definíciója:

$$\phi(r) := \inf\left\{\frac{Q(S, S^c)}{\pi(S)} : \pi(S) \leq r\right\},$$

ahol $Q(x,y) := \pi(x)p(x,y)$ és $Q(S,T) := \sum_{x\in S, y\in T} Q(x,y)$.

Néhány példa a profil kiszámolására: IP_d-ből $\phi(r) \geq c\, r^{-1/d}$ következik, a $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ tóruszon $\phi(r) \asymp r^{-1/d}/n$.

Morris-Peresből ezután IP_d-re $p_n(x,x) \leq C\, n^{-d/2}$, illetve a tóruszon $O(n^2)$ uniform keverési idő következik. Lámpagyújtogató csoporton $\phi(r) \asymp 1/\log r$, így $p_n(x,x) \leq \exp(-cn^{1/3})$, amiről majd látjuk is, hogy éles.

11.3 Izoperimetrikus keverési eredmények alkalmazásai

1) Geometriai leírás robosztusabb, mint az algebrai (visszatérési valószínűségek vagy sajátértékek pontos kiszámolása). Pld perkolációs fürtön való bolyongásra is lehet alkalmazni [Pet08].

2) Konvex testek térfogat-közelítése. `http://www.cs.elte.hu/~lovasz/randwalk-papers.html`

3) Stasztikus fizikai modellek szimulációja. Pld a legtöbb gráfon a térfogatban exponenciális sok teljes párosítás van, hogyan szimuláljunk egyet, ha meg akarjuk tudni, hogyan néz ki egy? `https://en.wikipedia.org/wiki/Markov_chain_Monte_Carlo`. Amúgy mit értünk az alatt, hogy néz ki egy teljes párosítás?

11.4 Konforminvariáns kulturális kitérő

Thurston magasságfüggvénye dominókhoz páros síkgráfokon, pld $\mathbb{Z}^2$. Konvergencia a Gauss-féle szabad mezőhöz, `https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_free_field`. Arctic circle phenomenon in domino tilings. [Ken09]

Konforminvariancia: Lévy 1940 bolyongás, Smirnov 2001 kritikus perkoláció, Kenyon 2000 dominó magasságfüggvény. [DCS12, Wer03]

12 Május 6.

Tóth Bálint fog helyettesíteni, és nagy valószínűséggel gráfok spektrumáról lesz szó, és arról, hogyan kell ezt keverési idő becslésére használni. Lásd [Pet15, Section 7.3] és `http://math.bme.hu/~balint/oktatas/markov_lancok/jegyzet/ml_jegyzet_egyben.pdf`, 60. oldaltól.

13 Május 13.

13.1 Spektrum és keverés

Bizonyítottátok Tóth Bálinttal a múlt órán, hogy $\tau_\infty(1/e) \leq \left(1 + \ln \frac{1}{\pi_*}\right) \tau_{\text{relax}}$, ahol $\tau_{\text{relax}} = 1/\gamma_{\text{abs}}$, az abszolút spektrálrés inverze.

A bizonyítást kicsit jobban megnézve lehet igazolni, hogy tranzitív gráfokon az ℓ^2-távolságot t lépés után az $n\,\lambda_2^{2t}$ felső becslés helyett pontosan is lehet számolni a spektrummal: $\sum_{i=1}^n \lambda_i^{2t}$. Ezt nem bizonyítottuk, hanem HF.

Alkalmazás: C_n körre keverési idő $\Theta(n^2)$, nincs cutoff. $\{0,1\}^k$ hiperkockán keverési idő $\sim \frac{1}{2} k \log k$, van cutoff.

Lásd [Pet15, Section 7.3] és [LPW09].

13.2 Bolyongás visszatérése a $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$ csoporton

Markov láncok Doob h-transzformáltjával meg lehet érteni, hogyan viselkednek kondícionált Markov láncok, és ezzel magyarázgattam, hogy a $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$ lámpagyújtogató csoporton miért $p_n(x,x) \geq \exp(-cn^{1/3})$, tehát a Morris-Peres felső becslés itt is lényegében éles.

Doob transzformáltról lásd [Pet15, Section 6.3]. A lámpagyújtogatóról most nem találok jó leírt forrást, ami így csinálná.

14 Május 20.

A Morris-Peres tétel bizonyításának fő ötletei. Lásd [Pet15, Section 8.3].

15 Vizsgatételek

1. Erdős-Kac és a momentum-módszer.
2. Ramsey számok és üggetlen ponthalmazok alsó és fölső becslései LLL nélkül,
3. Lovász Lokális Lemma és alkalmazásai
4. $G_{2n,d}$ lokális faszerűsége és függetlenségi száma
5. (a) Amenabilitás, térfogatnövekedés, kvázi-izometriák.
   (b) Benjamini-Schramm limesz, unimodularitás.
6. Bernoulli perkoláció alapok, és az amenabilitás szerepe.
7. Invariáns perkolációk unimoduláris tranzitív gráfokon.
8. Visszatérési valószínűségek és Markov-lánc keverési idők 1: spektrum.
9. Visszatérési valószínűségek és Markov-lánc keverési idők 2: izoperimetria, evolving sets.

References

[AldL07] D. Aldous and R. Lyons. Processes on unimodular random networks. *Electron. J. Probab.* **12** (2007), Paper 54, 1454–1508. `http://128.208.128.142/~ejpecp/viewarticle.php?id=1754`

[AS08] N. Alon and J. Spencer. *The Probabilistic Method, 3rd Edition.* Wiley Interscience, 2008.

[BS01] I. Benjamini and O. Schramm. Recurrence of distributional limits of finite planar graphs. *Electron. J. Probab.* **6** (2001), no. 23, 13 pp. (electronic). `[arXiv:math.PR/0011019]`

[BKPS04] I. Benjamini, H. Kesten, Y. Peres and O. Schramm. Geometry of the uniform spanning forest: transitions in dimensions 4, 8, 12, ... *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), 465–491. `[arXiv:math.PR/0107140]`

[BLPS99] I. Benjamini, R. Lyons, Y. Peres and O. Schramm. Group-invariant percolation on graphs. *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999), 29–66. `http://link.springer.com/article/10.1007/s000390050080`

[Bol81] B. Bollobás. The independence ratio of regular graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.* **83** (1981), 433–436. `http://www.jstor.org/stable/2043545`

[CsF16] P. Csikvári and P. E. Frenkel. Benjamini–Schramm continuity of root moments of graph polynomials. *Europ. J. Combin.* **52** (2016), 302–320. `arXiv:1204.0463 [math.CO]`

[DCS12] H. Duminil-Copin and S. Smirnov. Conformal invariance of lattice models. *In: Probability and Statistical Physics in Two and More Dimensions, Clay Mathematics Proceedings, vol. 15*, Amer. Math. Soc., 2012. `arXiv:1109.1549 [math.PR]`

[Dur10] R. Durrett. *Probability: Theory and Examples.* Fourth edition. Cambridge University Press, 2010.

[EL10] G. Elek and G. Lippner. Borel oracles. An analytical approach to constant-time algorithms. *Proc. Amer. Math. Soc.* **138** (2010), 2939–2947. `arXiv:0907.1805 [math.CO]`

[EFW07] A. Eskin, D. Fisher and K.Whyte. Quasi-isometries and rigidity of solvable groups. *Pure and Applied Mathematics Quarterly* **3** (2007), 927–947. `[arXiv:math.GR/0511647]`

[Gri10] G. Grimmett. *Probability on Graphs.* IMS Textbook Series, Vol. 1. Cambridge University Press, 2010. `http://www.statslab.cam.ac.uk/~grg/books/pgs.html`

[JŁR00] S. Janson, T. Łuczak and A. Ruciński. *Random graphs.* Wiley-Interscience, New York, 2000.

[Ken09] Richard Kenyon. *Lectures on dimers.* `arXiv:0910.3129 [math.PR]`

[LPW09] D. A. Levin, Y. Peres and E. L. Wilmer. *Markov chains and mixing times.* With a chapter by J. G. Propp and D. B. Wilson. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. `http://www.uoregon.edu/~dlevin/MARKOV/`

[Lyo05] R. Lyons. Asymptotic enumeration of spanning trees. *Combin. Probab. & Comput.* **14** (2005), 491–522. `[arXiv:math.CO/0212165]`

[LN11] R. Lyons and F. Nazarov. Perfect matchings as IID factors on non-amenable groups. *Europ. J. Combin.* **32** (2011), 1115–1125. `arXiv:0911.0092v2 [math.PR]`

[LP15] R. Lyons, with Y. Peres. *Probability on trees and networks.* Book in preparation, present version is at `http://mypage.iu.edu/~rdlyons`.

[MP05] B. Morris and Y. Peres. Evolving sets, mixing and heat kernel bounds. *Prob. Th. Rel. Fields* **133** (2005), no. 2, 245–266. `[arXiv:math.PR/0305349]`

[Pet08] G. Pete. A note on percolation on $\mathbb{Z}^d$: isoperimetric profile via exponential cluster repulsion. *Elect. Comm. Probab.* **13** (2008), 377–392. `[arXiv:math.PR/0702474v4]`

[Pet15] G. Pete. *Probability and Geometry on Groups.* Book in preparation, `http://www.math.bme.hu/~PGG.pdf`

[Pin73] M. Pinsker. On the complexity of a concentrator. *7th International Teletraffic Conference*, Stockholm, 1973. 318/1-4.

[Wer03] W. Werner. *Random planar curves and Schramm-Loewner evolutions.* Lecture notes from the 2002 Saint-Flour Summer School, `[arXiv:math.PR/0303354]`.