Tartalomjegyzék

1. Valószínűségi mező, valószínűség

Eseménytér, események Boole-algebrája

1.1. Legyenek A, B és C tetszőleges események. Fejezzük ki halmazelméleti műveletekkel a következő eseményeket:

(a) az A, B és C események közül pontosan k következik be $(k = 0, 1, 2, 3)$;

(b) az A, B és C események közül legalább i bekövetkezik $(i = 0, 1, 2, 3)$;

(c) az A, B és C események közül legfeljebb j következik be $(j = 0, 1, 2, 3)$.

1.2. Ellenőrizzük az alábbi azonosságokat:

(a) $A \circ A = \emptyset$;

(b) $A \circ \emptyset = A$;

(c) $A \circ \Omega = \overline{A}$;

(d) $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$;

(e) $(A \circ B) \cap B = B \setminus A$;

(f) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;

(g) $A \cap B \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

(h) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

(i) $A \setminus [A \setminus (B \setminus C)] = A \cap B \cap \overline{C}$;

(j) $A \cup B = A \circ B \circ (A \cap B)$;

(k) $A \circ C \cup [B \setminus (A \cup C)] = [(A \circ B) \setminus (A \cap C)] \cup [(B \circ C) \setminus (A \cap C)]$;

(l) $A \circ C \subset (A \circ B) \cup (B \circ C)$;

(m) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$;

(n) $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

(o) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = [A \setminus (B \cap C)] \cup [B \setminus (C \cap A)] \cup [C \setminus (A \cap B)]$;

(p) $(A \cup B \cup C \cup D) \setminus (A \cup B \cup C) = D \setminus (A \cup B \cup C)$;

(q) $A \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup D) = A \cap B \cap C \cap D$;

(r) $[(A \cap B) \setminus (A \cap C)] \setminus (B \cap C) = (A \cap B) \setminus C$;

(s) $(A \cap B) \cup C \setminus [(A \cap C) \cup B] = C \setminus (A \cup B)$;

(t) $[A \cap (B \cup C)] \cup [B \cap (C \cup A)] \cup [C \cap (A \cup B)] = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

1.3. Legyen Ω tetszőleges eseménytér és $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tetszőleges eseményalgebra. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $(\mathcal{A}, \circ)$ Abel-csoport;

(b) $(\mathcal{A}, \circ, \cap)$ gyűrű (melyben $\circ$ az összeadás és $\cap$ a szorzás), a gyűrű nulleleme $\emptyset$, egységeleme Ω.

1.4. (a) Három különböző érmét és két azonos (megkülönböztethetetlen) kockát dobunk fel egyszerre. Hány különböző kimenetele lehet a kísérletnek. Reprezentáljuk a kísérlet eseményterét.

(b) Három fekete és két fehér kockát dobunk fel egyszerre. (Az azonos színű kockák megkülönböztethetetlenek). Hány különböző kimenetele lehet a kísérletnek. Reprezentáljuk a kísérlet eseményterét.

1.5. Három kockát dobunk fel egyszerre. Az azonos színű kockák megkülönböztethetetlenek. Hány különböző kimenetele lehet a kísérletnek

(a) ha a kockák azonos színűek;

(b) ha két kocka fekete és a harmadik fehér;

(c) ha mindhárom kocka különböző színű?

1.6. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges események. Mit jelent az $A_1 \circ A_2 \circ \cdots \circ A_n$ esemény?

Megjegyzés: Az 1.3. feladat (a) pontjának következtében a $\circ$ művelet *asszociatív.*

1.7. Egy urnában van 6 fehér, 6 zöld és 2 piros golyó. Benyúlunk az urnába és találomra kiveszünk 2 golyót.

(a) Írjuk le az eseményteret.

(b) Hány megfigyelhető esemény lehetséges a szóban forgó kísérletnél?

(c) Hány megfigyelhető esemény lehetséges, ha a két golyót egymás után húzzuk?

Mértékelméleti egyenlőtlenségek

1.8. (a) Legyen A, B és C három tetszőleges esemény. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\mathbf{P}(A \circ C) \le \mathbf{P}(A \circ B) + \mathbf{P}(B \circ C).$$

Ez azt jelenti, hogy ha $\Delta(A, B) := \mathbf{P}(A \circ B)$ „távolságot” (szemimetrikát) értelmezzük az események között, akkor $\Delta(\cdot, \cdot)$ kielégíti a háromszög-egyenlőtlenséget.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{P}(A \circ B) = 0$, akkor $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B)$.

1.9. Mutassuk meg, hogy bármely A, B és C eseményre fennáll:

$$|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C)| \le \mathbf{P}(B \circ C).$$

1.10. Mutassuk meg, hogy bármely A és B eseményre fennáll:

$$-\frac{1}{4} \le \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \le \frac{1}{4}.$$

1.11. Mutassuk meg, hogy bármely A és B eseményre fennáll a

$$\mathbf{P}^2(A \cap B) + \mathbf{P}^2(A \cap \overline{B}) + \mathbf{P}^2(\overline{A} \cap B) + \mathbf{P}^2(\overline{A} \cap \overline{B}) \ge \frac{1}{4}$$

egyenlőtlenség, és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/2$ és $\mathbf{P}(A \cap B) = 1/4$ (azaz az A és B események függetlenek).

Útmutatás: Használjuk a lineáris algebrából jól ismert Schwarz-egyenlőtlenséget.

1.12. (a) Legyen A és B két esemény. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{P}(A) \ge 0.8$ és $\mathbf{P}(B) \ge 0.5$, akkor $\mathbf{P}(A \cap B) \ge 0.3$.

(b) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \ge P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n-1).$$

2. Leszámlálással meghatározható valószínűségek

Kombinatorikus feladatok

2.1. Legyen X egy egyenletes eloszlással választott véletlen szám az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazból. Jelölje $p(n)$ annak a valószínűségét, hogy $X^2 - 1$ osztható 10-zel. Mennyi lesz ekkor

(a) $p(10)$;

(b) $p(25)$;

(c) $\lim_{n\to\infty} p(n)$?

2.2. Két azonos erejű játékos, Ádám és Éva pingpongoznak. Tekintsük a következő eseményeket:

$$A := \{\text{Ádám négy meccsből (pontosan) hármat megnyer}\},$$
$$B := \{\text{Éva nyolc meccsből (pontosan) ötöt megnyer}\}.$$

(a) Számolás nélkül saccoljuk meg a két esemény valószínűségét. Melyik tünik valószínűbbnek?

(b) Ellenőrizzük intuíciónkat a valószínűségek kiszámolásával.

2.3. Három kockával dobva, mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege 10-nél nagyobb? (Számolás nélkül is megy!)

Megjegyzés: Ez volt a nyerés feltétele a XVII. században divatos „passe dix” játékban.

2.4. Mi a valószínűbb: az, hogy egy kockával négyszer dobva legalább egyszer hatost dobjunk, vagy hogy két kockával 24-szer dobva legalább egyszer mindkét kockával hatost dobjunk.

Megjegyzés: Ez de Méré lovag feladata, 1654-ben Blaise Pascaltól kérdezte. Valójában már Cardano (1501-1576) is foglalkozott a kérdéssel.

Útmutatás: Próbáljanak olyan bizonyítást találni, amely zsebszámológép használata nélkül is eredményre vezet (egy nevezetes egyenlőtlenséget kell alkalmazni).

2.5. Mi a valószínűbb: 6 kockadobással legalább egyszer hatost dobni vagy 12 kockadobással legalább kétszer hatost dobni?

Megjegyzés: A kérdés Isaac Newton és Samuel Pepys levelezésében fordul elő. Pepyst nem győzte meg Newton (korrekt) érvelése.

2.6. (a) Számoljuk ki az ötös lottón 0, 1, 2, 3, 4 és 5 találat valószínűségét.

(b) Számoljuk ki az hatos lottón 0, 1, 2, 3, 4, 5 és 6 találat valószínűségét. (A pótszámot most ne tekintsük nyerőszámnak.)

2.7. n (megkülönböztethető) golyót helyezünk véletlen módon n urnába. Mi a valószínűsége annak, hogy *pontosan* egy urna marad üresen?

2.8. A sakktáblán találomra helyezzünk el nyolc bástyát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egyik bástya sem ütheti a másikat?

2.9. Egy parkoló tizenkét egymás melletti helyből áll. Egy ember azt vette észre, hogy nyolc autó parkol úgy, hogy az üresen maradó négy hely egymás mellett volt. Feltéve, hogy négy üres parkolóhely volt, meglepő-e ez az elrendezés? Utal-e valamilyen nemvéletlen eseményre? (Pl. arra, hogy egy nagyobb társaság egyszerre hagyta el a parkolót.)

2.10. Egy n elemű populációból r elemű mintát veszünk. Mi annak a valószínűsége, hogy a populáció előre kijelölt N eleme közül egy sem legyen a mintában, feltéve hogy a mintát

(a) visszatevés nélkül;

(b) visszatevéssel

vesszük? Számoljuk ki a numerikus értékeket a következő esetekre:

(i) $n = 100$, $r = N = 3$;

(ii) $n = 100$, $r = N = 10$.

2.11. Bizonyítsuk be valószínűségszámítási módszerekkel, hogy bármely természetes n-re fennáll a következő azonosság:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Útmutatás: Használjuk a hipergeometrikus eloszlást.

2.12. Egy szekrényben n pár cipő van. Véletlenszerűen kiválasztunk $2r$ cipőt ($2r \leq n$). Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott cipők között

(a) nincsen teljes pár;

(b) pontosan egy teljes pár van;

(c) pontosan két teljes pár van?

2.13. Egy kulcskarikán n kulcs van, amelyek közül csak egy illik a kinyitandó zárba. Találomra (véletlen sorrendben) próbáljuk ki a kulcsokat – ismétlés nélkül mindaddig, amíg a jó kulcsra rá nem lelünk. Kísérletünk $1, 2, \ldots, n$ próbálkozás után érhet véget. Mutassuk meg, hogy mind az n eredménynek azonosan $1/n$ a valószínűsége.

2.14. Számoljuk ki a poker különböző értékelhető konfigurációinak valószínűségeit. Azaz 52 lapos francia kártyából ($\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, D, K, A$) véletlenszerűen kiválasztunk ötöt. Mi annak a valószínűsége, hogy egy párunk, két párunk, drillünk, sorunk, flush-ünk, fullunk, pókerünk, színsorunk, royal flush-ünk van?

2.15. A bridzsben az 52 lapos fracia kártyából minden játékos 13–13 lapot kap. Mi a valószínűsége annak, hogy Északnak és Délnek *együttesen* k db ásza van ($k = 0, 1, 2, 3, 4$)?

2.16. (a) Legyenek a, b, c, d nemnegatív egész számok, amelyekre $a + b + c + d = 13$. Számoljuk ki annak az eseménynek a valószínűségét, hogy Észak, Kelet, Dél és Nyugat a, b, c, illetve d darab pikket kap egy bridzsleosztásban.

(b) Az előbbi eredmény segítségével számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy valamelyik játékos a, egy másik b, egy harmadik c, végül a negyedik d pikket kap, ha

(1) $a = 5, b = 4, c = 3, d = 1$;

(2) $a = b = 4, c = 3, d = 2$;

(3) $a = b = c = 4, d = 1$.

2.17. (Stefan Banach gyufásdoboz-problémája)

(a) Egy szórakozott matematikus vesz két doboz gyufát. Mindkét doboz n szál gyufát tartalmaz. Egyik dobozt a bal, másikat a jobb zsebébe teszi. Valahányszor pipára akar gyűjtani, véletlenszerűen kiveszi az egyik dobozt és abból elhasznál egy szál gyufát. Egyik alkalommal azt veszi észre, hogy az elővett gyufásdoboza már üres. Mi annak a valószínűsége, hogy ekkor a másik dobozban pontosan k elhasználatlan gyufaszál van még?

Útmutatás: A kérdés megválaszolásához érdemes testre szabni az eseményteret. Tekintsük a $2n-k+1$ hosszú bal-jobb-sorozatokat! Ennyi épp elég ahhoz, hogy eldönthessük, hogy a kérdéses esemény bekövetkezett-e.

(b) A fenti kérdésre adott válasz segítségével találjunk egyszerű kifejezést az alábbi összegre:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{n}.$$

2.18. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat (például generátorfüggvény-módszerrel):

(a) $n \geq 1$ esetén $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$,

(b) $n \geq 0$ esetén $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$,

(c) $n \geq 2$ esetén $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = 0,$

(d) $n \geq 0$ esetén $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$

2.19. (a) Bizonyítsuk be, hogy pozitív n-re és k-ra fennáll a következő azonosság:

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j} = 0.$$

(b) Általánosabban:

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}t^j = \binom{n}{k}(1+t)^k.$$

Szitaformula

2.20. Lássa be a szitaformula segítségével, hogy $n \geq 1$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$$

Útmutatás: Legyen $A_1 = \cdots = A_n = \Omega$ a szitaformulában.

2.21. Lássa be a szitaformula segítségével, hogy $n \geq 2$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = 0$$

Útmutatás: legyenek a szitaformula $A_1, \ldots, A_n$ halmazai az n elemű halmaz ügyesen megválasztott részhalmazai.

2.22. (a) Egy embert tizenkétszer megbüntettek tilosban való parkolásért. Mind a tizenkét büntetést kedden vagy csütörtökön kapta. Amellett a feltevés mellett, hogy a rendőrök véletlenszerűen ellenőriznek a hét bármely napján, számoljuk ki a fenti eset valószínűségét.

(b) Számoljuk ki a szitaformula segítségével az előbbi feltevés mellett annak az eseménynek a valószínűségét, hogy van két olyan napja a hétnek, hogy a 12 rendőri ellenőrzés mind pont arra a két napra esett. Bölcs volt-e emberünk azon döntése, hogy ezentúl kedden és csütörtökön parkolóházba vitte autóját?

(c) Tizenkét hasonló büntetést kaptunk a hét különböző napjain, de egyiket sem vasárnap. Jogosult-e a feltevésünk, hogy a rendőrök vasárnaponként nem ellenőriznek? (Ld. 2.25. feladat)

2.23. (Elcserélt kalapok) Egy n tagú férfitársaság vacsorázni ment egy étterembe. Kalapjaikat a ruhatárban hagyták. Vacsora és borozgatás után kalapjaikat teljesen véletlenszerűen vitték el a ruhatárból. Mi a valószínűsége annak, hogy a társaságnak legalább egy tagja a saját kalapját vitte haza? Számoljuk ki e valószínűség határétérkét az $n \to \infty$ limeszben.

Elszántabbaknak: Számoljuk ki nagy n-re (azaz az $n \to \infty$ limeszben) annak az eseménynek a valószínűségét, hogy pontosan k ember megy haza a saját kalapjával a fején.

2.24. Tízszer dobunk egy kockával. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az $1, 2, \ldots, 6$ eredmények mindegyike legalább egyszer előfordul?

2.25. (a) k golyót helyezünk véletlenszerűen n dobozba. Mi a valószínűsége annak, hogy egyik doboz sem marad üres?

(b) Az előbbi eredményt használva számoljuk ki a következő kifejezés értékét $k \leq n$-re:

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}j^k\binom{n}{j}.$$

2.26. A bridzs játékot 52 lapos francia kártyával játsszák, mely négy színben 13–13 lapot tartalmaz. A négy játékos, akiket az égtájakkal szokás megnevezni, osztáskor 13–13 kártyát kap. A szemben ülő játékosok együtt vannak: az Észak–Dél és a Kelet–Nyugat vonal játszik egymás ellen.

(a) Mi a valószínűsége, hogy az Észak–Dél vonalnál lesz valamelyik színből mind a 13 lap?

(b) Mi a valószínűsége, hogy az Észak–Dél és a Kelet–Nyugat vonalnál is lesz valamelyik színből 13 kártya?

2.27. Egy jól megkevert 52 lapos franciakártya-csomagból egyenként húzzuk a kártyákat mindaddig, amíg mind a négy színből nem húzunk legalább egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

(a) legalább tízszer

(b) pontosan tízszer

kell húznunk?

2.28. Egy éjszakai járatra tíz utas száll föl a végállomáson. Mindegyikük teljesen véletlenszerűen és egymástól függetlenül választja ki, hogy a 20 megálló közül hol szeretne leszállni. Feltételezzük, hogy útközben senki sem akar a buszra felszállni. Mi annak a valószínűsége, hogy a busz a hetedik, kilencedik, tizenharmadik és tizenhatodik megállók mindegyikében megáll?

2.29. Egy 52 lapos jól megkevert kártyacsomagból 4 játékosnak 5-5 kártyát osztunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy valamelyik játékosnál lesz legalább két ász?

2.30. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy egy bridzsleosztásban Északnak semelyik értékből ne legyen kézben mind a négy kártyája (azaz ne legyen se négy 2-ese, se négy 3-asa, …, se négy K-a, se négy A-a).

3. Feltételes valószínűség

3.1. n dobozban elhelyezünk N golyót úgy, hogy mind az n^N elhelyezés egyenlően valószínű. Feltéve, hogy egy adott dobozba esik golyó, mennyi a valószínűsége annak, hogy K golyó esik bele?

3.2. Három kockát feldobunk. Feltéve, hogy a dobott számok között nincs két egyforma, mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyiken hatos van?

3.3. Egy kockával addig dobunk, amíg először kapunk hatost. Feltéve, hogy a szükséges dobások száma páros, mennyi a valószínűsége annak, hogy kétszer kellett dobnunk?

3.4. Móricka és Pistike pingpongoznak. Minden játszmát a többitől függetlenül Móricka p, Pistike pedig q valószínűséggel nyer meg, ahol $p > 0$, $q > 0$ és $p + q = 1$. A játék akkor ér véget, ha valaki két egymás utáni játszmát megnyer.

(a) Mi a valószínűsége, hogy Móricka nyeri az utolsó játszmát?

(b) Mi a valószínűsége, hogy ugyanaz nyeri az első játszmát, mint az utolsót?

(c) Ha tudjuk, hogy az utolsó játszmát Móricka nyerte, mennyi a valószínűsége, hogy az elsőt is?

3.5. Azt mondjuk, hogy az F esemény negatívan hat az E eseményre, jelölésben $F \searrow E$, ha $\mathbf{P}(E|F) \le \mathbf{P}(E)$. Bizonyítsa a következő állításokat, vagy adjon ellenpéldát.

(a) Ha $F \searrow E$, akkor $E \searrow F$.

(b) Ha $F \searrow E$ és $E \searrow G$, akkor $F \searrow G$.

(c) Ha $F \searrow E$ és $G \searrow E$ és $F \cap G = \emptyset$, akkor $(F \cup G) \searrow E$.

3.6. Tegyük fel, hogy egy ketyere meghibásodásának a valószínűsége a $(t, t+h)$ időintervallumban azon feltevés mellett, hogy már t ideig hibátlanul működött $a(t)h + o(h)$-val egyenlő, ahol $\lim_{h\to 0} h^{-1}o(h) = 0$. Határozzuk meg annak a $p(t)$ valószínűségét, hogy a ketyere legalább t ideig hibátlanul működik.

Teljes valószínűség tétele, toronyszabály

3.7. Két urnában piros és kék golyók vannak. Az első urnában 5 piros és 4 kék, a másodikban 7 piros és 3 kék golyó.

(a) Kihúzunk az első urnából találomra egy golyót és áttesszük a második urnába. Ezután a második urnából húzunk találomra egyet és áttesszük az első urnába. Végül harmadszor újból az első urnából húzunk egy golyót. Mi a valószínűsége annak, hogy a harmadik alkalommal piros golyót húzunk?

(b) Egyszerre húzunk egy-egy golyót a két urnából és kicseréljük őket. Ezután húzunk még egy golyót az első urnából. Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó húzáskor piros golyót találunk?

3.8. Két játékos, Aladár és Béla, a következő játékszabályok alapján játszik: Aladár feldob egy kockát, azután két érmét annyiszor dob fel, ahányat a kockával dobott. Ha e dobások során legalább egyszer két fejet dobott, akkor Béla fizet Aladárnak egy petákot, ellenkező esetben Aladár fizet Bélának egy petákot. Melyiküknek előnyös ez a játék?

3.9. Az α kockának 4 piros és 2 fehér, míg a β kockának 2 piros és 4 fehér lapja van. Feldobunk egy érmét. Ha fej a dobás eredménye, akkor a továbbiakban az α kockát használjuk, ha pedig írás akkor a β-t. Az így kiválasztott kockával egymás után n-szer dobunk.

(a) Mi annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobásnál az eredmény piros? $(k = 1, 2, \ldots, n)$

(b) Feltéve, hogy mind az első $k-1$ kockadobás eredménye piros, mi annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobás eredménye is piros lesz? $(k = 1, 2, \ldots, n)$

3.10. Egy internetes közösségi szájt felhasználói körébe meghívásos alapon lehet bejutni. Eredetileg két tagja van a közösségnek, Ádám és Éva. Néha a közösség valamelyik (egyenletesen választott) tagja meghív egy új embert. Ádám köréhez tartozik valaki, ha ő maga Ádám vagy egy Ádám köréhez tartozó tag hívta meg.

(a) Mekkora valószínűséggel áll 1, 2, illetve 3 főből Ádám köre akkor, amikor 4 fős a közösség?

(b) Jelölje az Éva körébe tartozó tagok számát X akkor, amikor n fős a közösség. Adja meg X eloszlását. *Útmutatás:* Teljes indukcióval bizonyítsa állítását.

3.11. Jancsi és Juliska randevút beszélnek meg egy meghatározott időpontra két utca kereszteződésénél. Elfelejtik viszont megbeszélni, hogy a négy sarok közül melyiknél várnak egymásra. Az útkereszteződés nagyon forgalmas, nem lehet átlátni egyik sarokról a többire. Mindketten pontosan megérkeznek valamelyik sarokra, és ha a másik nincs ott, 2.5 percet várnak a másikra, ezután átmennek a szomszédos sarkok valamelyikére, $1/2 - 1/2$ valószínűséggel. Ez további 0.5 percet vesz igénybe. Ha a másik nincs ott, újból 2.5 percet várnak, majd $1/2 - 1/2$ valószínűséggel kiválasztanak egy szomszédos sarkot, ahová átbattyognak, stb. Feltesszük, hogy eredetileg mindketten 1/4-1/4 valószínűséggel érkeznek bármelyik sarokra egymástól függetlenül, és szintén egymástól és múltbeli helycseréiktől függetlenül váltogatják várakozási helyüket mindaddig, amíg nem találkoznak. Találkozásnak számít az is, ha egymással szembe mennek át az úttesten.

(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a megbeszélt időponttól számított 3 percen belül találkoznak?

(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a megbeszélt időponttól számított 6 percen belül találkoznak?

(c) Jelölje p_n annak a valószínűségét, hogy az első $3n$ percen belül találkoznak. Határozzuk meg p_n értékét.

(d) Jelölje r_n annak a valószínűségét, hogy a találkozás a $3n$-edik percben következik be. Határozzuk meg az r_n valószínűséget.

(e) Bizonyítsuk be, hogy 1 annak a valószínűsége, hogy véges időn belül találkoznak.

3.12. Száz utas várakozik arra, hogy beszállhassanak egy százfős repülőgépbe. A sor legelején álló utas elveszítette a beszállókártyáját, így egy egyenletesen választott helyre ül le a gépen. A többi utas egyenként száll fel, és ha egyikük azt látja, hogy a helyét elfoglalta már valaki más, akkor a még szabad ülések közül véletlenül választ egyet, és oda ül le. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a sor végén álló utas oda fog ülni, ahova a beszállókártyája szól?

3.13. Egy egyetemnek 10 ezer hallgatója van. Minden hallgató kap egy k darab (tízes számrendszerbeli) számjegyből álló Neptun-kódot, amit az egyetem egyenletesen sorsol az összes k jegyű szám közül. Ha a sorsoláskor nem jegyzik meg a már kisorsolt Neptun-kódokat, akkor körülbelül hány jegyű kódra van szükség, ha azt akarják, hogy 0.995-nél nagyobb legyen a valószínűsége annak, hogy mindenki különböző kódot kap?

Útmutatás: Az adódó szorzat kiszámításánál alkalmazza a születésnap-problémánál megismert közelítést, mely azon alapul, hogy $\ln(1+\varepsilon) = \varepsilon + o(\varepsilon)$, amint $\varepsilon \to 0$.

3.14. Jelölje p_n annak a valószínűségét, hogy egy családban pontosan n gyerek van, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Legyen $p_n := \alpha\rho^n$, $n \geq 1$-re, és $p_0 = 1-\alpha\rho(1+\rho+\rho^2+\rho^3+\ldots)$, ahol $\rho \in (0,1)$ és $\alpha > 0$ úgy vannak megválasztva, hogy $\alpha\rho < 1-\rho$. Tegyük fel, hogy ha egy családban n gyerek van, azok nemenkénti eloszlása egyenletes (a 2^n lehetőség között). Mutassuk meg, hogy minden $k \geq 1$-re, annak a valószínűsége, hogy egy családban pontosan k fiú van $2\alpha\rho^k/(2-\rho)^{k+1}$.

Útmutatás: Használjuk a generátorfüggvény-módszert.

Végtelen toronyszabály

3.15. Legyenek $0 < p_i < 1$, $i \in \mathbb{N}$. Lássuk be, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} p_i < \infty$ akkor és csak akkor, ha $\prod_{i=1}^{\infty} \big(1-p_i\big) > 0$.

Útmutatás: Használjuk a rendőrelvet és azt, hogy $0 < p < \frac{1}{2}$ esetén $e^{-2p} < 1-p < e^{-p}$.

3.16. Pistike élete első valószínűségszámítás-vizsgáján $1/2$ valószínűséggel megy át. Ha ezen megbukik, a következő vizsgára már kevesebbet tanul, ezen csak $1/3$ a siker valószínűsége. Minél többször bukik meg, annál kevesebbet tanul, így $k-1$ sikertelen vizsga után már csak $1/(k+1)$ a valószínűsége, hogy a k-adik vizsgája sikeres. Ám Pistike kitartó, és a szabályzat szerint akárhányszor vizsgázhat. Mennyi a valószínűsége, hogy előbb-utóbb átmegy?

3.17. Egy vadász 30 méter távolságban felfedez egy rókát, és rálő. Ha a róka ezt túléli, akkor 10 m/s sebeséggel próbál menekülni. A vadász 3 másodpercenként ujratölt és lő a rókára mindaddig, amíg meg nem öli, vagy (szerencsés esetben) a róka el nem tünik a látóhatáron. A vadász találati valószínűsége a távolság négyzetével fordítottan arányos, a következő képlet szerint $\mathbf{P}$(a vadász eltalálja az x méter távolságban levő rókát) $= 675x^{-2}$ ($x \geq 30$). Ha találat is éri a rókát, nem biztos, hogy fatális: az egyes találatokat (függetlenül azok számától) a róka $1/4$ valószínűséggel túléli. Van-e esélye a rókának arra, hogy túlélje ezt a kellemetlen kalandot?

Megjegyzés: A feladatot nyilván matematikusok találták ki matematikus diákoknak. Miért rossz modellje ez a rókavadászatnak? Van-e lényeges különbség a róka- és fácánvadászat között?

3.18. Adott egy (végtelen térfogatú) urnánk és végtelen sok $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ elemeivel számozott golyónk. Az urna eredetileg üres. Éjfél előtt egy perccel fogjuk az $1, 2, \ldots, 10$ számú golyókat, behelyezzük őket az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. Éjfél előtt fél perccel fogjuk a $11, 12, \ldots, 20$ számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. Éjfél előtt 2^{-n} perccel fogjuk az $10n+1, 10n+2, \ldots, 10(n+1)$ számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. És ezt így folytatjuk éjfélig. Bizonyítandó, hogy éjfélkor az urna 1 valószínűséggel üres lesz.

Bayes tétele

3.19. Vándorlásai közben Odüsszeusz egyszer egy hármas útelágazáshoz ért. Tudta, hogy az egyik út Athénbe, a másik Mükénébe a harmadik pedig Spártába vezet, de nem tudta, hogy melyik hova. Azt is tudta, hogy az athéniek átlagosan csak minden harmadik alkalommal mondanak igazat, a mükénéiek minden második alkalommal hazudnak, a spártaiak viszont becsületesek, sohasem hazudnak. Kockadobással döntötte el, hogy melyik utat válassza, méghozzá egyenlő esélyt adva mindháromnak. Ezután ment, ment, mendegélt, míg egy városba nem ért. Ott az első szembejövő embertől megkérdezte, mennyi kétszer kettő és azt a választ kapta, hogy négy. Mi a valószínűsége annak, hogy Odüsszeusz végülis Athénbe érkezett?

3.20. Az A urnában két piros és egy fehér, a B urnában egy piros és két fehér golyó van. Feldobunk egy szabályos kockát. Ha hatost dobtunk, az A urnából, egyébként a B urnából húzunk egy golyót. Tudjuk, hogy piros golyót húztunk. Mi a valószínűsége, hogy hatost dobtunk?

3.21. Móricka a zoknijait két dobozban tartja, mindkettőben sok zokni van. Az egyikbe igyekszik a lyukasakat gyűjteni, ebben a zoknik 90%-a lyukas. A másikba a jókat próbálja tenni, ebben csak 10% lyukas zokni van. Ma reggel a nagy sietségben Móricka véletlenszerűen belenyúlt az egyik dobozba, és felvett belőle két zoknit. Az egyetemre menet észrevette, hogy a bal lábán lyukas a zokni. Ezek után mennyi annak a valószínűsége, hogy a jobb lábán is lyukas zokni van?

3.22. A ketyeregyárban az A, B és C gépsorokon állítják elő a ketyeréket. Az A gépsoron a ketyerék 25%-át gyártják, a B gépsoron a ketyerék 35%-át, míg a C gépsoron a 40%-át. Az A gépsoron előállított ketyerék 5%-a, a B gépsoron előállítottak 4%-a, a C gépsoron előállítottak 2%-a hibás. A gyárban gyártott ketyerék közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, amelyről kiderül, hogy hibás. Mi annak a valószínűsége, hogy ezt a ketyerét az A, B, ill. a C gépsoron gyártották?

3.23. Egy televíziós vetélkedőben a játékosnak három ajtó közül kell választania, és a mögötte elrejtett nyereményt kapja jutalmul. Az egyik ajtó mögött egy luxusautó található, a másik kettő mögött pedig egy-egy kecske. Mikor a játékos kiválasztott egyet a háromból, a játékvezető a másik két ajtó közül kinyit egyet, ami mögött kecske van, és felajánlja, hogy a játékos még megváltoztathatja a döntését. Érdemes-e áttérni a másik ki nem nyitott ajtóra? Mekkora valószínűséggel nyerjük meg így az autót?

3.24. Egy biztosítótársaság minden férfi autóvezető ügyfele minden évben egymástól függetlenül p_f valószínűséggel nyújt be kárigényt autóbaleset miatt, a női autóvezetők pedig p_n valószínűséggel, ahol $p_f \neq p_n$. Tudjuk, hogy az autóvezetők $\alpha \cdot 100$ százaléka férfi. Egy véletlenül választott autóvezető esetén két évet megfigyelve legyen A_i az az esemény, hogy az i-edik évben kárigénnyel fordul a társasághoz, ahol $i = 1, 2$.

(a) A $\mathbf{P}(A_2|A_1)$ és a $\mathbf{P}(A_2)$ valószínűségek közül melyik nagyobb?

(b) A $p_f = 0.01$ és $p_n = 0.015$ ill. $\alpha = 0.6$ értékek mellett egy adott autóvezető mekkora valószínűséggel férfi, ha azt tudjuk róla, hogy két év alatt egyszer nyújtott be baleset miatti kárigényt?

3.25. A Magyar Etikett Intézet felmérése szerint Magyarországon a fiúk két kategóriába oszthatóak: 2/3-uk udvarias, 1/3-uk udvariatlan. Az udvarias fiúk az esetek 90%-ában engedik előre a lányokat az ajtóban, az udvariatlanok viszont csak az esetek 20%-ában. Láttam, hogy Jancsi előre engedte Juliskát, Jutkát viszont nem.

(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Jancsi az udvariatlan kategóriába tartozik?

(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek után Jancsi Erzsit is előre fogja engedni?

3.26. Egy városban kétféle taxitársaság működik, egyikük fehér, másikuk sárga színű kocsikkal szállít. A városban a fehér taxik aránya 15%, míg a sárgáké 85%. Egy balesetnek, melyet egy taxis okozott, egyetlen szemtanúja volt. Az ő állítása szerint a vétkes taxis fehér kocsiban ült. Tudjuk továbbá, hogy a tanú megbízhatósága 80%-os, vagyis hasonló körülmények között az esetek 80%-ában állapítja meg helyesen a taxi színét.

(a) Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a vétkes taxis fehér autót vezetett.

(b) Általánosítsuk a feladatot úgy, hogy a városban lévő fehér taxik aránya valamilyen $0 \leq p \leq 1$ szám. A tanú megbízhatósága továbbra is 80%-os. Mutassuk meg, hogy annak a valószínűsége, hogy a vétkes taxis fehér autóban ült, pontosan akkor nagyobb 1/2-nél, ha $p > 0.2$.

(c) Általánosítsuk tovább a feladatot úgy, hogy a városban lévő fehér taxik aránya valamilyen $0 \leq p \leq 1$ szám, és hogy valamely $0 \leq q \leq 1$-gyel a tanú megbízhatósága $100q$%-os, vagyis az esetek $100q$%-ában ismeri fel helyesen a színeket. (Itt természetesen q nem $(1-p)$-t jelöli.) Határozzuk meg a

$$\{(p,q) : 0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1\}$$

négyzet azon részét, amelyre annak a valószínűsége, hogy a vétkes taxis fehér kocsiban ült, feltéve, hogy a tanú fehér taxiról vallott, 1/2-nél nagyobb.

3.27. Aladár, Béla, Cili és Dömötör hazudósak: átlagosan az esetek 2/3-ában hazudnak mind a négyen, egymástól függetlenül, véletlenszerűen. *Aladár azt állítja, hogy Béla tagadja, hogy Cili azt mondta, hogy Dömötör hazudott.* Mi a valószínűsége annak, hogy Dömötör igazat mondott? (Feltételezzük, hogy Aladár tudja, hogy mit mindott Béla, Béla tudja, hogy mit mindott Cili, Cili tudja, hogy mit mindott Dömötör. Továbbá, hogy Cili azt is el tudja dönteni, hogy Dömötör hazudott-e vagy sem.)

Geometriai sor összegzésével vagy feltételes rekurzióval kiszámolható feladatok

3.28. Egy érmét addig dobunk, amíg kétszer egymás után azonos oldalára nem esik. Minden lehetséges n dobást igénylő sorozat valószínűsége legyen 2^{-n}. (Miért?) Írjuk le a kísérlet eseményterét. Mi az alábbi események valószínűsége:

$$A := \{\text{a kísérlet hatnál kevesebb érmedobással végetér}\},$$
$$B := \{\text{a kísérlet páros számú érmedobás után ér véget}\}.$$

3.29. Anna, Bori és Cili egyforma erejű pingpongjátékosok. A következő módon játszanak: Anna és Bori mérik először össze az erejüket. Ezután a vesztes kiáll, és a várakozó Cili áll be a helyére, hogy összemérje tudását az előző nyertessel. Minden egyes meccs után a vesztes átadja a helyét a várakozónak. Ezt mindaddig folytatják, amíg valamelyikük kétszer egymás után nem nyer, és akkor ő lesz a körmérkőzés győztese. Írjuk le a körmérkőzés eseményterét. Az n páros csata után véget érő sorozatok valószínűsége legyen 2^{-n}. (Miért?) Mi a valószínűsége annak, hogy Anna, ill. Bori, ill. Cili nyeri a kőrmérkőzést?

3.30. Aladár és Béla teniszezik. Aladár sikeresen szervál. Béla minden alkalommal a neki ütött labdát minden előző ütéstől függetlenül 0.25 valószínűséggel nem találja el, 0.15 valószínűséggel a hálóba üti és 0.6 valószínűséggel jól adja vissza Aladárnak. Aladár a neki ütött labdát minden alkalommal az előző ütésektől függetlenül 0.1 valószínűséggel nem találja el, 0.2 valószínűséggel a hálóba üti és 0.7 valószínűséggel jól adja vissza Bélának. Mi a valószínűsége, hogy a labda a menet végén a hálóban lesz?

3.31. Aladár, Béla és Cili célba lőnek A,B,C,A,B,C,... sorrendben. Győztes az, aki először talál a célba. Az egyes lövéseknél Aladár találati valószínűsége 2/5, Béláé és Cilié 3/5. A lövések egymástól függetlenek. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Aladár, Béla, illetve Cili nyeri meg a versenyt?

4. Függetlenség

Független események

4.1. (a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy két egymástól függetlenül kitöltött lottószelvény közül legalább az egyik legalább két találatos?

(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha 3 000 000 lottószelvényt véletlenszerűen és egymástól függetlenül kitöltenek, ezek között pontosan öt darab öttalálatos szelvény lesz?

4.2. (a) Hány (egymástól független) bridzsleosztásra van szükség ahhoz, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer mind a négy ász Északnak jusson, legalább 0.5 legyen?

(b) Hány (egymástól független) bridzsleosztásra van szükség ahhoz, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer mind a négy ász egy kézbe jusson, legalább 0.5 legyen?

4.3. Egy tesztrendszerű vizsgánál minden diáknak 20 kérdésre kell igennel vagy nemmel felelni. Tegyük fel, hogy egy vizsgázó az egyes kérdésekre egymástól függetlenül p valószínűséggel tudja a helyes választ, q valószínűséggel azt hiszi, hogy tudja a helyes választ, de téved, r valószínűséggel nem tudja a helyes választ és ennek tudatában van ($p+q+r=1$). Ha a vizsgázó tudja, hogy egy kérdésre nem tudja a helyes választ, akkor találomra ír igent vagy nemet $1/2-1/2$ valószínűséggel. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a vizsgázó legalább 19 kérdésre helyesen válaszol?

4.4. Kilencszer dobunk fel egy pénzérmét. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások között legalább két fej és legalább két írás is előfordul, B pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb négy írás fordul elő. Függetlenek-e a fenti események egymástól? Miért?

4.5. Válasszunk találomra egy számot az $\{1,2,3,\dots,n\}$ halmazból egyenletes eloszlással. Jelölje A_p azt az eseményt, hogy a kiválasztott szám a p prím számmal osztható.

(a) Mutassuk meg, hogy ha $p_1,p_2,\dots,p_k$ prímek és az n szám osztható $p_1,p_2,\dots,$ p_k-val, akkor az $A_{p_1},A_{p_2},\dots,A_{p_k}$ események (teljesen) függetlenek.

(b) Jelöljük C_n-el azt az eseményt, hogy a véletlenszerűen kiválasztott szám n-hez relatív prím. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{P}(C_n)=\prod_{p\ \text{prím},p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

4.6. Legyen $s \in (1, \infty)$ rögzített és $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ a Riemann-féle dzeta-függvény. (A végtelen összeg $s > 1$-re konvergens.) Továbbá legyen $p_n = p_n(s) := n^{-s}/\zeta(s)$. Legyen egy X véletlen szám *eloszlása* $\mathbf{P}(X = n) = p_n$, ahol $n \in \mathbb{N}$. Értelmezzük bármely r prímszámra a következő eseményt:

$$E_r := \{\text{az } X \text{ véletlen természetes szám osztható az } r \text{ prímszámmal}\}$$

(a) Bizonyítsuk be, hogy az $\{E_r : r \text{ prím}\}$ események teljesen függetlenek.

(b) Adjunk valószínűségszámítási bizonyítást (és ezzel valószínűségszámítási értelmezést is) a híres

$$\zeta(s)^{-1} = \prod_{r:\ r \text{ prím}} \left(1 - \frac{1}{r^s}\right)$$

*Euler-formulá*ra.

(c) Választunk két egész számot függetlenül és egyenletes eloszlással a $\{0, 1, \ldots, N\}$ halmazból. $N \to \infty$ esetén mihez konvergál annak a valószínűsége, hogy a két szám relatív prím?

Megjegyzés: Az Euler formula standard levezetése és értelmezése megtalálható bármely elemi bevezető számelmélet jegyzetben vagy könyvben.)

4.7. Vegyünk egy n fős társaságot. Jelölje A_{ij} azt az eseményt, hogy az i-edik és j-edik ember egy napon született.

(a) Páronként független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény?

(b) Teljesen független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény?

4.8. Egy n elemű halmazból az A és B véletlen részhalmazokat egymástól függetlenül egyenletes eloszlással választjuk ki a 2^n lehetséges részhalmaz közül.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy $A \subseteq B$?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy $A \cap B = \emptyset$?

4.9. Számítsuk ki a $\mathbf{P}(A_1 \circ A_2 \circ \cdots \circ A_n)$ valószínűséget, ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események teljesen függetlenek, és mindegyiknek a valószínűsége p.

4.10. Egy országban az A, B, C és D városok között a következő közvetlen utak vannak: $A \leftrightarrow B$, $A \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow B$, $D \leftrightarrow B$, $D \leftrightarrow C$. Egy téli éjszaka mind az öt útszakaszon p valószínűséggel képződik hóakadály, teljesen függetlenül egymástól. Mi a valószínűsége annak, hogy másnap reggel mégis el lehet jutni A-ból D-be? Adjunk számszerü eredményt $p = 1/2$-re. Próbáljuk megindokolni az utóbbi választ az első kérdésre kapott formula használata nélkül is.

Területek arányával kiszámítható valószínűségek

4.11. Adja meg az egységnégyzet A, B és C részhalmazait olymódon, hogy

(a) $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$, $\mathbf{P}(C \cap A) = \mathbf{P}(C)\mathbf{P}(A)$, és $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$

(b) $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$, $\mathbf{P}(C \cap A) = \mathbf{P}(C)\mathbf{P}(A)$, de $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$

(c) $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$, $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$, de $\mathbf{P}(C \cap A) \neq \mathbf{P}(C)\mathbf{P}(A)$

4.12. Az A, B és C pontokat válasszuk véletlenszerűen egyenletes eloszlással és egymástól függetlenül egy kör kerületén. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ABC háromszög hegyesszögű?

4.13. Legyen B és C két független egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 1]$ intervallumon. Tekintsük a $p(x) = x^2 + Bx + C$ polinomot. Mi a valószínűsége, hogy p gyökei valósak?

4.14. Egy l hosszú ropit két, egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kiválasztott pontban eltörünk.

(a) Mennyi a valószínűsége annak hogy az így nyert három darabból háromszöget alkothatunk?

(b) Mennyi a valószínűsége annak hogy az így nyert három darabból hegyesszögű háromszöget alkothatunk? (Ez nehezebb!)

(c) Mennyi a valószínűsége annak hogy az így nyert három darab mindegyike rövidebb, mint az $a \in [l/3, l]$ rögzített szám?

4.15. Három egyenlő hosszú ropiból véletlenszerűen letörünk egy-egy darabot. A törési pontokat egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással választjuk ki.

(a) Mennyi a valószínűsége annak hogy az így nyert három darabból háromszöget alkothatunk?

(b) Mennyi a valószínűsége annak hogy az így nyert három darabból hegyesszögű háromszöget alkothatunk?

4.16. Egy négyzetrácsos papírra egy tintapaca csöppen. Mekkora a valószínűsége, hogy a paca nem metszi a vonalakat, ha azok fél centire vannak egymástól, a tintafolt sugara pedig egyenletes eloszlású a $[0, \frac{1}{3}]$ intervallumon?

4.17. Három űrhajó leszáll a Marsra egymástól függetlenül egyenletes eloszlással választott pontokra. Két űrhajó akkor tud *közvetlen* rádiókapcsolatba lépni egymással, ha a Mars középpontjából induló helyzetvektoraik hegyesszöget zárnak be egymással. Bizonyítsuk be, hogy annak a valószínűsége, hogy a bármely két űrhajó kommunikálni tud egymással (szükség esetén a harmadik űrhajó közvetítésével) $(\pi + 2)/(4\pi)$.

4.18. (a) Egy kör kerületén válasszunk n pontot egymástól függetlenül és egyenletes eloszlás szerint. A kerületen elhelyezkedő pontok egy konvex sokszöget katároznak meg. Mennyi annak a valószínűsége, hogy e sokszög lefedje a kör középpontját?

(b) Egy kör belsejében válasszunk n pontot egymástól függetlenül és egyenletes eloszlás szerint. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pontok konvex burka lefedje a kör középpontját?

5. Diszkrét valószínűségi változók

Binomiális és Poisson-eloszlás definíciója, bevezető feladatok

5.1. Sárkányföldön az n fejű sárkány

$$p_n = \binom{6}{n-1} \cdot 0.7^{n-1} \cdot 0.3^{7-n}$$

valószínűséggel fordul elő ($n = 1, 2, \ldots, 7$). Egy sárkány fejeinek levágása veszélyes művelet: az ember minden fejét egymástól függetlenül 90% eséllyel tudja levágni, és ha ez nem sikerül, akkor a sárkány megeszi az embert.

(a) Elém kerül egy sárkány, de a nagy ködben nem látom, hogy hányfejű. Mi az esélye, hogy túlélem a találkozást?

(b) Tegyük fel, hogy épp most vágtam le a hatodik fejét, de még mindig nem látom, hogy maradt-e feje. Ilyen helyzetből mekkora valószínűséggel élem túl a harcot?

(c) Csata után találkozom a cimborámmal, aki szintén legyőzött egy sárkányt. Ezt figyelembe véve mi a valószínűsége, hogy hétfejűvel volt dolga?

5.2. Legyenek M, N, n nemnegatív egészek, úgy, hogy $M \le N$ és $n \le N$. A hipergeometrikus eloszlást a következő kifejezés értelmezi:

$$h_{N,M,n}(k) := \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Legyen n nemnegatív egész és $p \in [0, 1]$. A binomiális eloszlást a következő kifejezés értelmezi:

$$b_{p,n}(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha rögzített n és k mellett $N \to \infty$, $M \to \infty$ úgy, hogy $\frac{M}{N} \to p$, akkor $h_{N,M,n}(k) \to b_{p,n}(k)$.

5.3. Mutassa meg, hogy a Poisson-eloszlás unimodális, vagyis

$$\mathbb{P}(X=0) \le \mathbb{P}(X=1) \le \cdots \le \mathbb{P}(X=\lfloor\lambda\rfloor),$$

illetve

$$\mathbb{P}(X=\lfloor\lambda\rfloor) \ge \mathbb{P}(X=\lfloor\lambda\rfloor+1) \ge \mathbb{P}(X=\lfloor\lambda\rfloor+2) \ge \ldots.$$

5.4. Átlagosan hány mazsolának kell egy sütiben lennie, ha azt kívánjuk elérni, hogy egy véletlenszerűen választott sütiben legalább 0.99 valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

5.5. Lovas gátversenyen a lovasok körpályán versenyeznek, és a ló a pályán elhelyezett akadályokat egymástól függetlenül azonos valószínűséggel veri le. Ha 5% annak valószínűsége, hogy a lovas hibátlanul teljesít egy kört, mennyi az esélye, hogy egy körben legfeljebb három akadályt ver le?

5.6. (a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy 1000 egymás utáni pókerleosztásban legalább négyszer van fullunk?

(b) Számoljuk ki a fenti valószínűséget numerikusan a Poisson-approximáció segítségével.

5.7. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhuba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több mint egy sajtóhuba van?

5.8. Egy rossz hírű légitársaságnál minden évben 1/2 valószínűséggal előfordul (legalább egy) gépeltérítés.

(a) Mi a valószínűsége, hogy jövőre legalább három gépeltérítés lesz?

(b) Mi a valószínűsége, hogy jövőre legalább három gépeltérítés lesz, feltéve ha tudjuk, hogy legalább egyszer elő fog fordulni?

5.9. 1000 megkülönböztethető golyót helyezünk véletlenszerűen 10 000 dobozba. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első 25 dobozba legalább 4 golyó essék?

5.10. London központi kerületében bekövetkező autóbalesetek száma száraz napos időben $\lambda = 10$ paraméterű Poisson-eloszlású, míg nedves esős időben $\mu = 20$ paraméterű Poisson-eloszlású. Kora novemberben Londonban $p = 0.6$ valószínűséggel van ronda esős idő (egész nap), $q = 0.4$ a valószínűsége annak, hogy verőfényes napsütés van (szintén egész nap). Azt olvastam a *Times*-ban, hogy múlt csütörtökön 17 autóbaleset történt London központjában. Mennyi a valószínűsége annak, hogy esett az eső?

5.11. Egy nagy virágágyásba sok virágmagot szórunk egyenletesen. Később a virágágyást sok kis egyenlő méretű darabra osztjuk. Azt tapasztaljuk, hogy a kis darabok 10%-ába nem került egyetlen mag sem.

(a) Hány magot szórtunk ki földdarabonként átlagosan?

(b) A földdarabok hány százalékában lesz egynél több mag?

5.12. Egy erdő átlagos sűrűsége: 16 fa 100 m^2-enként. A fák törzse teljesen szabályos, 20 cm átmérőjű kör alapú henger. Egy puskagolyót lövünk ki célzás nélkül, az erdő szélétől 120 m-re, kifelé az erdőből. Mennyi annak a valószínűsége, hogy eltalálunk egy fatörzset? (Tekintsünk el attól az apró zavaró tényezőtől, hogy a fák alapköreinek középpontjai min. 20 cm távolságban vannak.)

5.13. Feldobunk egy érmét hatvanszor. Jelölje a fejek számát X, és legyen $p_k = \mathbf{P}(X = k)$. Adjunk felső becslést a $\mathbf{P}(|X-30| \ge 20)$ valószínűségre a *Bernoulli-féle NSZT* bizonyítási módszereivel:

(a) Lássa be, hogy $p_{40} \le \frac{1}{11}$

(b) Lássa be, hogy $p_{50} \le \frac{1}{11} \cdot \left(\frac{20}{41}\right)^{10} \le 2^{-13}$

(c) Lássa be, hogy $50 \le k \le 60$ esetén $p_k \le 2^{-13} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{k-50}$

(d) Lássa be, hogy $\sum_{k=50}^{60} p_k \le 2^{-13} \cdot \frac{5}{4}$

(e) Lássa be, hogy $\mathbf{P}(|X-30| \ge 20) < 5 \cdot 2^{-14}$

5.14. Legyenek $p \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ és $\lambda = pn \in (0,\infty)$ rögzítve. Továbbá: $a_k := b(k;p,n)/p(k;\lambda)$. Bizonyítsuk be, hogy amint $k = 0,1,2,\ldots$ növekszik

(a) a_k először növekszik, majd csökken, és a maximális értékét $\lfloor\lambda+1\rfloor$-nál éri el.

(b) a_k először kisebb, mint 1, majd 1 fölé nő, majd újból 1 alá csökken.

5.15. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat

(a) $\sum_{k=0}^{n} kb(k;p,n) = np$;

(b) $\sum_{k=0}^{n} k^2 b(k;p,n) = n^2p^2 + np(1-p)$;

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} kp(k;\lambda) = \lambda$;

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(k;\lambda) = \lambda^2 + \lambda$.

5.16. Bizonyítsuk be, hogy a binomiális eloszlás Poisson-approximációjában a konvergencia k-ban egyenletes, azaz

$$\lim\left(\sup_k \left|\, b(k;p,n) - p(k;\lambda)\,\right|\right) = 0,$$

amint $p \to 0$, $n \to \infty$ úgy, hogy $pn \to \lambda \in (0,\infty)$.

Diszkrét eloszlások meghatározása

5.17. Egy n egymástól függetlenül működő alkatrészből álló rendszert figyelünk meg egymás utáni azonos hosszúságú időperiódusokban. Feltesszük, hogy minden egyes alkatrész működése vagy nem működése egy periódusban független attól, hogy működött-e vagy sem a többi periódusban. A rendszer működésében akkor van fennakadás, ha legalább k alkatrész nem működik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez először az m-edik periódusban következik be, ha p annak a valószínűsége (minden alkatrészre), hogy egy alkatrész egy periódusban működjék?

5.18. Egy szobának négy ablaka van, ebből három zárva van és egy nyitva. A szobából három légy próbál kirepülni. Minden másodpercben, egymástól függetlenül nekirepülnek valamelyik véletlenszerűen kiválasztott ablaknak. Ha az ablak nyitva van, kirepülnek, ha pedig zárva, akkor egy másodperc múlva újból próbálkoznak. Jelölje T azt a véletlen időpontot, amikor 2 alá csökken a szobában levő legyek száma.

(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy n másodperc elteltével még legalább két légy van a szobában, azaz $\mathbf{P}(n < T)$?

(b) Határozza meg ennek segítségével T eloszlását.

5.19. Egymás után tízszer dobunk egy szabályos érmével. Legyen X az egymás utáni egyforma kimenetelekből álló sorozatok száma, vagyis pl. csupa fej esetén $X = 1$, a FFIIIIFIFF sorozatnál pedig $X = 5$. Határozzuk meg X eloszlását.

5.20. Egy utca autóforgalmát úgy modellezzük, hogy

1. az időskálát fix és oszthatatlan egy másodpercnyi időegységekre osztjuk,
2. feltesszük, hogy $p \in (0,1)$ annak a valószínűsége, hogy az egyes időintervallumokban elhalad az utcán egy autó,
3. továbbá azt is feltesszük, hogy az egyes időegységekben történő események egymástól függetlenek.

Egy gyalogos akkor tud átmenni az utca túloldalára, ha legalább három másodpercig forgalommentes az utca. (Feltesszük, hogy az utca belátható: a gyalogos el tudja dönteni, hogy a következő három másodpercben lesz-e forgalom.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az utcán átmenni óhajtó gyalogosnak $0, 1, 2, 3, 4$ másodpercig kell várnia áthaladás előtt. (Ne próbáljanak *általános* képletet felírni – ez egyelőre nehéz.)

5.21. Szindbádnak egyszer megadatott, hogy N háremhölgy közül kiválassza a legszebbet a következő játékszabály szerint: az N háremhölgy egyenként vonult el előtte, azok valamelyikét kellett kiválasztania. A már elvonultak nem hívhatók vissza és azokról, akik még nem vonultak el, semmit sem tudott. Feltételezzük, hogy a háremhölgyeknek jól definiált szépségfokozatuk van: van egy legszebb, egy második legszebb, egy harmadik legszebb, és végül a legkevésbé szép közöttük. Továbbá azt is feltételezzük, hogy véletlen sorrendben vonulnak el Szindbád előtt: mind az $N!$ lehetséges sorrendjük egyformán valószínű.

Szindbád a következő stratégiát választotta: k hölgyet hagyott elvonulni, majd ezután kiválasztotta azt, amelyik szebb volt az összes előtte már elvonultnál (és ha ilyen hölgy nem akad, akkor Szindbád magányosan távozik). Mi a valószínűsége annak, hogy ezzel a módszerrel valóban a legszebb háremhölgyet választotta? Határozzuk meg azt a k-t, amely mellett a fenti stratégia optimális $N \to \infty$ határesetben.

5.22. Az előző feladatban leírt feltételek mellett jelölje X_n azt, hogy a sorban n-edik hölgy hányadik legszebb az első n hölgy közül. Például ha az egymás utáni hölgyek egyre szebbek, akkor a sorozat $1, 1, \dots, 1$ lesz, ha egyre csúnyábbak, akkor $1, 2, 3, \dots, N$. Bizonyítsuk be, hogy az $X_1, X_2, \dots, X_N$ valószínűségi változók teljesen függetlenek.

Binomiális és Poisson-eloszlás, diszkrét együttes eloszlások, feltételes eloszlások, függetlenség

5.23. 3 golyót dobunk egymástól függetlenül és egyenletesen 3 dobozba. Jelölje X a nemüres dobozok számát és Y az első dobozban levő golyók számát. Milyen eloszlású Y? Határozza meg X és Y együttes eloszlását (azaz töltsön ki egy 3×4-es táblázatot).

5.24. Igazoljuk a következő formulát:

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{8!}{k! \cdot 3! \cdot (5-k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^{5-k} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^5,$$

és adjunk valószínűségszámítási jelentést neki.

5.25. Tegyük fel, hogy a világűr egy bizonyos tartományában kétfajta csillag van, A és B típusú. Az A típusú csillagok számának eloszlása λ paraméterű $\mathrm{POI}(\lambda)$, míg a B típusúaké μ paraméterű $\mathrm{POI}(\mu)$ Poisson-eloszlás. Az A, ill. B típusú csillagok száma egymástól független. Bizonyítsuk be, hogy a világűr e tartományában lévő csillagok száma $\mathrm{POI}(\lambda + \mu)$ Poisson-eloszlású. Értelmezzük és fogalmazzuk meg az állítást absztrakt terminusokban.

5.26. Egy fán levő almák száma $\mathrm{POI}(\lambda)$ Poisson-eloszlású. Az egyes almák egymástól függetlenül p valószínűséggel kukacosak.

(a) Bizonyítsuk be, hogy a kukacos almák száma $\mu = p\lambda$ paraméterű Poisson-eloszlású.

(b) Jelölje X a kukacos és Y az ép almák számát. Mutassa meg, hogy X és Y független valószínűségi változók.

5.27. Legyenek X_1 és X_2 független, $\mathrm{POI}(\lambda_1)$ ill. $\mathrm{POI}(\lambda_2)$ Poisson-eloszlású valószínűségi változók.

(a) Bizonyítsuk be, hogy $X_1 + X_2$ eloszlása $\mathrm{POI}(\lambda_1 + \lambda_2)$ Posson-eloszlás.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $X_1 + X_2$ *ismeretében* X_1 *feltételes eloszlása binomiális*, azaz

$$\mathbf{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k}.$$

5.28. Bizonyítsuk be és értelmezzük a valószínűségszámítás terminusaiban a következő azonosságokat:

(a) $\sum_{l=0}^{k} b(l; p, n_1) b(k-l; p, n_2) = b(k; p, n_1 + n_2)$,

(b) $\sum_{l=0}^{k} p(l; \lambda_1) p(k-l; \lambda_2) = p(k; p, \lambda_1 + \lambda_2)$.

5.29. Móricka, ha túrázni megy, minden lépésnél – az előzményektől függetlenül – valamekkora (kicsi) valószínűséggel hasraesik és megüti a térdét, illetve valamekkora (kicsi) valószínűséggel hanyatt esik és megüti a könyökét. Egy 10 kilométeres túrán átlagosan 3-szor szokta megütni a térdét és 2-szer a könyökét. Legfeljebb milyen hosszú túrára engedheti el az anyukája, ha azt akarja, hogy $\frac{2}{3}$ valószínűséggel térd- és könyöksérülés nélkül járja meg?

5.30. Budapest XI. kerületében naponta bekövetkező koccanásos balesetek számának eloszlása $\lambda = 10$ paraméterű $p(n; \lambda)$ Poisson-eloszlás. Annak valószínűsége, hogy koccanás után a felek meg tudnak egyezni a felelősség megoszlásában, $q = 0.6$. Amennyiben a felek nem tudnak megegyezni, a kerületi közlekedésrendészethez fordulnak helyszíni szemlét kérve. Tegnap $k = 5$-ször hívták a XI. kerületi rendőröket koccanásos baleset helyszínére. Mennyi a valószínűsége annak, hogy összesen $m = 10$ koccanásos baleset történt a kerületben?

5.31. Egy tábla mogyorós-mazsolás Boci csokiban átlagosan 30 mazsola van. Egy tábla csoki 15 kockából áll. Egy kocka csokiban 1/2 valószínűséggel nincsen mogyoródarab.

(a) Milyen eloszlású lesz az egy tábla csokiban levő mogyoródarabok száma?

(b) Letörünk 2 kockát és megesszük. Mennyi a valószínűsége, hogy az elfogyasztott csokiban levő mogyoró- és mazsoladarabok együttes száma legalább 2? Adjon minél egyszerűbb formulát válaszként.

5.32. Az országban évente 100 ezer végzős gimnazistának kell pályát választania. Egy gimnazista 0.0001 valószínűséggel próbálkozik azzal, hogy űrhajósnak menjen. Az űrhajós felvéleli vizsga kétfordulós, az első a jelentkező fizikai, a második a szellemi rátermettséget méri. Tegyük fel, hogy ezek független tulajdonságok. Az első vizsgán egy jelentkező 20% eséllyel megy át, a másodikon 50% eséllyel. A következő kérdésekre adjon könnyen kiszámolható képleteket válaszként.

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy jövőre legfeljebb egy ember megy át az űrhajós felvételi vizsgán?

(b) Idén 10 ember ment át a felvételi első fordulóján. Mekkora a valószínűsége, hogy legalább kettőt felvesznek közülük?

(c) Tavaly n jelentkezőt vettek fel űrhajósnak. Mekkora valószínűsége, hogy k ember bukott meg a felvételin?

Diszkrét várhatóérték-számolás

5.33. Egy érmével dobunk. Ha az eredmény fej, akkor még kétszer dobunk, ha írás, akkor még egyszer. Mennyi az összes fej eredmények számának várható értéke?

5.34. Egy embernek n kulcsa van, amelyek közül egyetlen egy nyit egy bizonyos ajtót. Emberünk véletlenszerűen próbálkozik a kulcsokkal mindaddig, amíg rá nem talál a megfelelő kulcsra. Határozzuk meg a próbálkozások számának várható értékét, ha

(a) a sikertelen kulcsokat nem zárja ki a további próbálkozások során (visszatevéses húzások),

(b) a sikertelen kulcsokat kizárja a további próbálkozások során (visszatevés nélküli húzások).

5.35. Két kockával dobva, mennyi a dobott számok maximumának ill. minimumának várható értéke?

5.36. (a) Határozzuk meg az ötös lottó találatok számának várható értékét egy találomra kitöltött szelvény esetén.

(b) Számítsuk ki az ötös lottó sorsoláson kihúzott legnagyobb, illetve legkisebb szám várható értékét.

5.37. Ketten céllövésben versenyeznek, a két versenyző p_1 illetve p_2 valószínűséggel ér el találatot ($p_1 < p_2$). Az ügyetlenebb kezd, majd felváltva lőnek. Aki először talál, az nyer. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ügyesebb nyer? Mennyi a játék várható időtartama, ha percenként egy lövést végeznek?

5.38. Számítsuk ki az $(1+X)^{-1}$ valószínűségi változó várható értékét a következő esetekben:

(a) ha $X \sim \mathrm{BIN}(p, n)$ binomiális eloszlású;

(b) ha $X \sim \mathrm{POI}(\lambda)$ Poisson-eloszlású.

5.39. Adjon példát olyan X diszkrét eloszlású valószínűségi változóra, amelynek

(a) nem létezik a várható értéke,

(b) létezik a várható értéke, de nem létezik szórása,

(c) létezik a $\mathbb{E}(X^k)$ ún. k-adik momentuma, ha $k = 1, 2, \dots, p$, de nem létezik, ha $k = p+1, p+2, \dots$.

Útmutatás: Használja fel a Riemann-féle $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ függvény értékét definiáló végtelen összeg konvergenciatartományáról tanultakat! A kapott eloszlások momentumai is kifejezhetőek a ζ-függvény segítségével.

5.40. Legyen X pozitív értékű valószínűségi változó. Bizonyítandó, hogy $(\mathbf{E}(X))^{-1} \le \mathbf{E}(X^{-1})$.

Megjegyzés: Ez a Jensen-egyenlőtlenség legegyszerűbb sajátos esete.

$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq i)$

5.41. Legyen X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó, és tegyük fel, hogy $\mathbf{E}(X) < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq i).$$

5.42. (a) Legyenek X és Y független nemnegatív egész értékű valószínűségi változók, melyekre $\mathbf{E}(X) < \infty$ és $\mathbf{E}(Y) < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E}(\min\{X, Y\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq i)\mathbf{P}(Y \geq i).$$

(b) Általánosítsuk az előbbi összefüggést tetszőleges k darab független nemnegatív egész értékű $X_1, X_2, \ldots X_k$ valószínűségi változóra, melyekről feltesszük, hogy véges a várható értékük:

$$\mathbf{E}(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} \mathbf{P}(X_j \geq i).$$

(c) Az (a) kérdés feltételei mellett bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E}(\max\{X, Y\}) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[1 - \mathbf{P}(X \leq i)\mathbf{P}(Y \leq i)\right].$$

5.43. X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó, mely egy ketyere müködési idejét fejezi ki napokban mérve. Mennyi a ketyere várható élettartama, ha

(a) $\mathbf{P}(X \geq n) = (n!)^{-1}$,

(b) $\mathbf{P}(X \geq n) = (n)^{-1}$?

5.44. Legyen X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó, melynek véges a második momentuma, azaz $\mathbf{E}(X^2) < \infty$. Fejezzük ki az $S := \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}(X \geq k)$ mennyiséget $\mathbf{E}(X)$ és $\mathbf{Var}(X)$ segítségével.

Geometriai eloszlás

5.45. Legyenek $X \sim \mathrm{GEO}(p_1)$ és $Y \sim \mathrm{GEO}(p_2)$ független geometriai eloszlású valószínűségi változók. Milyen eloszlású X és Y minimuma?

5.46. Lássa be, hogy az $\mathbb{N}$-értékű valószínűségi változók közül csak a geometriai eloszlás rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal.

5.47. Érmével dobunk addig, amíg először fordul elő, hogy két egymás utáni dobás eredménye azonos. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?

5.48. Legyenek X, Y és Z független, azonos $g(k;p) = q^k p$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ geometriai eloszlású valószínűségi változók.

(a) Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

$$\mathbf{P}(X = Y), \quad \mathbf{P}(X \geq 2Y), \quad \mathbf{P}(X + Y \leq Z).$$

(b) Legyen $U := \min\{X, Y\}$ és $V := X - Y$. Bizonyítsuk be, hogy U és V függetlenek.

5.49. Móricka matematikushallgató a BME-n, Valószínűségszámítás I.-ből próbál átmenni. Ha nem sikerül neki az egyik félévben, akkor a következő félévben újra próbálkozik. Az egymást követő félévek próbálkozásainak kimenetele független, és minden félévben $\frac{2}{3}$ valószínűséggel bukik meg. Ha az aláírást megszerezte, még ugyanabban a félévben próbálkozik az elméleti vizsgával. Ha ez nem sikerül, akkor a következő félévben újra próbálkozik az elméleti vizsgával, egészen addig, amíg át nem megy ezen is. Az egyes félévekben elméletből $\frac{1}{4}$ valószínűséggel megy át. Határozza meg Móricka Valószínűségszámítás I.-gyel töltött félévei számának az eloszlását.

5.50. Legyenek X és Y független, azonos $g(k;p) = q^k p$, $k = 0, 1, 2, \dots$ geometriai eloszlású valószínűségi változók. Lássuk be *számolás nélkül*, hogy $X + Y$ *ismeretében* X *feltételes eloszlása* egyenletes, azaz:

$$\mathbf{P}(X = k | X + Y = n) = \frac{1}{n+1}, \qquad k = 0, 1, \dots, n.$$

5.51. Anna és Bori a következőt játsszák: egy szabályos érmét dobálnak felváltva. Anna kezd. Az nyer, aki a második fejet dobja, tehát pl. Anna: Fej, Bori: Fej esetén Bori nyert.

(a) Várhatóan hány érmedobás után fejeződik be a játék?

(b) Mekkora a valószínűséggel nyer Anna?

Megjegyzés: Mindkét kérdés megválaszolható viszonylag kevés számolással.

5.52. n darab független, GEO(p) eloszlású valószínűségi változó összege mekkora valószínűséggel páratlan?

5.53. Az árokugró versenyfutás szabályai a következőek: A futópálya egyenes, és van rajta végtelen sok egyforma árok. Két egyforma képességű versenyző méri össze az erejét árokfutásból, akik fej fej mellett futnak. Egy versenyző egymás után át próbálja ugrani az árkokat, végül egyszer túl kicsit ugrik és beleesik valamelyikbe. Tegyük fel, hogy egy versenyző sohasem fárad el, és az árkokat egymástól függetlenül, egyenként 2^{-L} valószínűséggel tudja átugorni, ahol L az árok hossza. Ha az egyikük beleesett egy árokba, akkor véget ért a verseny.

(a) Mutassa meg, hogy a döntetlen valószínűsége pontosan akkor kisebb ε-nál, ha

$$L < \log_2 \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)$$

teljesül.

(b) Ha döntetlen, akkor visszaküldjük őket a startvonalhoz és újra kezdődik a verseny. Ezt ismételjük egészen addig, amíg győztest nem hirdethetünk. Mekkora legyen L, ha a versenyzők ugrásainak számának várható értékét akarjuk minimalizálni?

Szórás- és kovarianciaszámolás

5.54. Határozza meg a diszkrét egyenletes, a geometriai és a Poisson-eloszlások szórásnégyzetét.

5.55. Legyen $X_1, \dots, X_r$ együttesen multinomiális eloszlású $p_1, \dots, p_n$ paraméterekkel (ahol $\sum_{i=1}^r p_i = 1$), azaz

$$\mathbf{P}(X_1 = k_1, \dots, X_r = k_r) = \mathbb{1}\left(\sum_{i=1}^r k_i = n \right) \cdot \frac{n!}{\prod_{i=1}^r k_i!} \prod_{i=1}^r {p_i}^{k_i}$$

Határozza meg $X_1, \dots, X_r$ kovarianciamátrixát!

5.56. Hamis érmével dobunk, melynél a *fej* valószínűsége p, az *írás*é pedig $q = 1 - p$. Jelöljük X-szel és Y-nal az első, ill. a második tiszta (fej vagy írás) sorozat hosszát. (Pl. ha dobássorozatunk $FFFIIF\dots$, akkor $X = 3$, $Y = 2$; ha pedig dobássorozatunk $IFFI\dots$, akkor $X = 1$, $Y = 2$.) Határozzuk meg a következő mennyiségeket: $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(Y)$, $\mathbf{E}(X^2)$, $\mathbf{E}(Y^2)$, $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{D}^2(X)$, $\mathbf{Var}(Y) = \mathbf{D}^2(Y)$, $\mathbf{Cov}(XY)$.

6. Folytonos eloszlásfüggvények, sűrűségfüggvények

Eloszlásfüggvények

6.1. Eloszlásfüggvények-e a következő függvények?

(a) $F(x) := \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} x;$

(b) $F(x) := \begin{cases} 0 & \text{ha } -\infty < x \le 0, \\ [x]/2 & \text{ha } 0 < x \le 2, \\ 1 & \text{ha } 2 < x < \infty; \end{cases}$

(c) $F(x) := \begin{cases} 0 & \text{ha } -\infty < x \le 0, \\ x/(1+x) & \text{ha } \quad 0 < x < \infty; \end{cases}$

(d) $F(x) := \exp(-e^{-x})$;

(e) $F(x) := \begin{cases} 0 & \text{ha } -\infty < x \le 0, \\ 1-(1-\exp\{-x\})/x & \text{ha } \quad 0 < x < \infty. \end{cases}$

6.2. Milyen α és c értékekre lesz eloszlásfüggvény a következő függvény:

$$F(x) = \exp(-ce^{-\alpha x})?$$

6.3. Bizonyítsuk be, hogy ha $F(x)$ eloszlásfüggvény, akkor bármely rögzített $h > 0$-ra az alább értelmezett $G_1(x)$ és $G_2(x)$ is eloszlásfüggvény.

$$G_1(x) := \frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(y)\,\mathrm{d}y, \qquad G_2(x) := \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} F(y)\,\mathrm{d}y.$$

Adjunk valószínűségszámítási értelmet a fenti formuláknak.

6.4. Legyen $F(x)$ *folytonos* eloszlásfüggvény és $F(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy

$$G(x) := \begin{cases} 0 & \text{ha } \quad -\infty < x \le 1, \\ F(x) - F(x^{-1}) & \text{ha } \quad 1 < x < \infty \end{cases}$$

is eloszlásfüggvény. Adjunk valószínűségszámítási értelmet a fenti formulának.

6.5. Lássa be, hogy ha egy folytonos eloszlásfüggvényű nemnegatív valószínűségi változó rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal, akkor csak exponenciális eloszlású lehet.

Sűrűségfüggvények

6.6. Mondjuk meg, hogy az alábbi függvények közül melyek valószínűségi sűrűségfüggvények és melyek nem:

(a) $f(x) := \begin{cases} 1/3 & \text{ha } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$

(b) $f(x) := \begin{cases} (\sin x)/2 & \text{ha } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$

(c) $f(x) := \begin{cases} x^{-2} & \text{ha } 1 \le x, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$

(d) $f(x) := \begin{cases} x/(1+x) & \text{ha } 0 \le x, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$

(e) $f(x) := \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$;

(f) $f(x) := \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$;

(g) $f(x) := \begin{cases} 4x^3e^{-x^4} & \text{ha } 0 \le x, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$

(h) $f(x) := \begin{cases} -\log x & \text{ha } 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$

(i) $f(x) := \begin{cases} 2e^{-x}(1-e^{-x}) & \text{ha } 0 \le x, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$

(j) $f(x) := \begin{cases} -e^{-x}/x + (1-e^{-x})/x^2 & \text{ha } 0 < x, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$

(k) $f(x) := \dfrac{1}{\pi \cosh x}$;

(l) $f(x) := \dfrac{\lambda^n}{2(n-1)!}|x|^{n-1}e^{-\lambda|x|} \qquad n \in \mathbb{N}, \;\; \lambda > 0.$

6.7. Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(e^{-(x-m)^2/2} + e^{-(x+m)^2/2} \right).$$

(Ez azt jelenti, hogy $X = Y + Z$, ahol Y és Z független valószínűségi változók, $\mathbf{P}(Y = \pm m) = 1/2$ és Z standard normális eloszlású.) Vizsgáljuk meg, hogy m mely értékeire lesz a fenti sűrűségfüggvény unimodális (azaz egy maximumpontú).

6.8. Pistike randevút beszélt meg Juliskával este 6-ra. Pistike két úton is eljuthat a megbeszélt randevú helyszínére, a két út között érmedobással dönt. Az utakon való végigjutás ideje két valószínűségi változót határoz meg: A-t és B-t.

- Az A sűrűségfüggvénye (percekben számolva):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 5 \text{ vagy } x > 20, \\ \frac{2}{75}(x-5) & \text{ha } 5 \leq x < 10, \\ \frac{1}{75}(20-x) & \text{ha } 10 \leq x \leq 20. \end{cases}$$

- A B sűrűségfüggvénye pedig:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 5, \\ \frac{1}{10} \exp\left(-\frac{x-5}{10}\right) & \text{ha } x > 5. \end{cases}$$

Pistike 6-kor indul útnak, mert elfelejtette nézni az órát. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak, ha Juliska nem egy türelmes természet, és maximum tíz percet hajlandó várni?

Szimmetrikus eloszlásfüggvények

6.9. Egy X valószínűségi változót szimmetrikus eloszlásúnak nevezünk, ha van olyan $\mu \in \mathbb{R}$, hogy $X - \mu$ és $\mu - X$ valószínűségi változók eloszlása megegyezik. Jelelölje F az X eloszlásfüggvényét.

(a) Mennyi $F(\mu)$? (Vigyázat, beugratós kérdés!)

(b) Mennyi $\int_{\mu-a}^{\mu+a} F(x)\mathrm{d}x$?

6.10. Jelölje X eloszlásfüggvényét F, és tegyük fel, hogy F szigorúan monoton növő és folytonos. Legyen $-X$ eloszlásfüggvénye G. Bizonyítsa be, hogy X akkor és csak akkor szimmetrikus eloszlású, ha az

$$x \mapsto x - G^{-1}(F(x))$$

függvény konstans.

6.11. Mely $c > 0$ esetén lesz $F(x) = \frac{e^x}{e^x + c}$ egy szimmetrikus eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye?

Geometriai problémák

6.12. Egy l hosszúságú ropit találomra választott pontban kettétörünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebb eloszlásfüggvénye?

6.13. Válasszunk két pontot függetlenül és egyenletesen az egységkör kerületén. Határozzuk meg a távolságuk eloszlásfüggvényét.

6.14. Válasszunk az egységnégyzetben egy pontot véletlenszerűen (egyenletes eloszlással). Jelölje ξ e pontnak a távolságát a négyzet legközelebbi oldalától. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét.

6.15. Az x tengely $[0, 1]$ intervallumában véletlenszerűen kiválasztunk egy pontot. Jelölje ξ e pont távolságát a sík $(0, 1)$ koordinátájú pontjától. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét.

6.16. Egy téglalap oldalainak hossza legyen 1 ill a. A két szemközti 1 hosszú oldalon egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölünk egy-egy véletlen pontot. Jelölje X e pontok távolságát. Meghatározandó X sűrűségfüggvénye.

6.17. Válasszunk az egységnégyzetben véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) egy pontot. Jelölje ξ e pontnak a négyzet legközelebbi csúcsától való távolságát. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét.

6.18. (a) A $[0,1]$ intervallumban jelöljünk ki találomra (azaz egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással) három pontot. Határozzuk meg a középső pont abszcisszájának eloszlásfüggvényét.

(b) A $[0,1]$ intervallumban jelöljünk ki találomra (azaz egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással) n pontot. Határozzuk meg a k-adik pont abszcisszájának eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét.

7. Valószínűségi változók függvényei, egydimenziós eloszlástranszformációk

7.1. $X \sim \mathrm{POI}(\lambda)$ Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Írjuk fel az $Y := 2X + 1$ valószínűségi változó eloszlását, és számítsuk ki az $\mathbf{E}(Y)$ várható értéket és a $\mathbf{D}^2(Y)$ szórásnégyzetet.

7.2. Legyen X a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg az $Y := X^{-1}$ és a $Z := X(1+X)^{-1}$ valószínűségi változók eloszlásfüggvényét és sűrűségfügvényét.

7.3. Legyen X standard normális eloszlású valószínűségi változó. (Azaz X normális eloszlású, amelynek várható értéke 0, szórásnégyzete 1.) Határozzuk meg az $Y := 2+|X|$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét.

7.4. Legyen $X \sim \mathrm{N}(m,\sigma)$ normális eloszlású valószínűségi változó ($\mathbf{E}(X) = m$, $\mathbf{D}^2(X) = \sigma^2$).

(a) Határozzuk meg az $Y := a \cdot X + b$ sűrűségfüggvényét, várható értékét, szórását.

(b) Határozzuk meg az $Z := X^2$ valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét $m = 0$ esetén.

(c) Határozzuk meg a $U := e^X$ *lognormális* eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét.

7.5. Legyen X *folytonos* eloszlású valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye $F(x)$.

(a) Határozzuk meg az $Y := F(X)$ és a $Z := -\log(F(X))$ valószínűségi változók eloszlásfüggvényét.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $G : \mathbb{R} \to [0,1]$ eloszlásfüggvény és $G^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R}$-et a következőképpen értelmezzük: $G^{-1}(u) := \sup\{x \in \mathbb{R} : G(x) < u\}$, akkor az $Y := G^{-1}(F(X))$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye pontosan G.

7.6. Legyen U a $[0,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Adjunk példát olyan Ψ transzformációra, hogy $\Psi(U) = V$ eloszlása λ paraméterű exponenciális, valamint

(a) Ψ monoton csökkenő.

(b) Minden $0 \leq v$-ra a $\Psi^{-1}(\{v\})$ halmaz két elemből áll.

7.7. Legyen X egy valószínűségi változó, amelyre $\mathbf{P}(X = 0) = 0$ és $Y := X^{-1}$. Mi a feltétele annak, hogy X és Y azonos eloszlásúak legyenek?

7.8. Legyen $X \sim \mathrm{LN}(m,\sigma)$ lognormális eloszlású valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye

$$f(x) := \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left\{ \frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Bizonyítsuk be (lehetőleg számolás nélkül), hogy ha $C > 0$ és $\alpha \neq 0$ rögzített konstansok, akkor a $Y := CX^\alpha$ valószínűségi változó szintén lognormális eloszlású, melynek paraméterei $m' = \alpha m + \log C$ és $\sigma' = |\alpha|\sigma$.

7.9. A következő feladatokban adott a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye ill. sűrűségfüggvénye. Meg kell határozni az ξ függvényeként értelmezett X, Y, Z, ... valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.

(a) ξ egyenletes eloszlású a $[-1,1]$ intervallumban; $X := \xi^2$, $Y := \xi^3$, $Z := \tan(\frac{\pi}{2}\xi)$, $U := \sin(\pi\xi)$.

(b) ξ exponenciális eloszlású λ paraméterrel; $X := 3\xi + 2$, $Y := \xi^2$, $Z := \sqrt{\xi}$.

(c) ξ standard normális eloszlású; $X := \xi^2$, $Y := \xi^{-2}$.

(d) ξ egyenletes eloszlású a $[-2,1]$ intervallumban; $X := \xi^2$, $Z := \mathrm{ctg}(2\pi\xi)$, $U := \cos(\pi\xi)$.

(e) ξ exponenciális eloszlású λ paraméterrel; $X := -3\xi + 2$, $Y := e^{\xi}$.

(f) ξ sűrűségfüggvénye $2x$ a $[0,1]$ intervallumon, egyébként 0, $Y := \xi^{-2}$.

7.10. Tekintsük az (x,y)-síkon a $(0,r)$ középpontú r sugarú kört. Sorsoljunk egyenletes eloszlással egy pontot a kör kerületén. Vetítsük ezt a véletlen pontot a $(0,2r)$ pontból az vízszintes koordinátatengelyre. Mi a vetület sűrűségfüggvénye?

7.11. Bizonyítsuk be, hogy ha ξ Cauchy-eloszlású valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, és $X := 1/\xi$, $Y := 2\xi/(1-\xi^2)$, $Z := (3\xi - \xi^3)/(1-3\xi^2)$, akkor X, Y és Z szintén Cauchy-eloszlású.

Útmutatás: Használjuk a következő trigonometriai azonosságokat: ha $\xi = \mathrm{tg}(\alpha)$, akkor $1/\xi = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, $2\xi/(1-\xi^2) = \mathrm{tg}(2\alpha)$ és $(3\xi - \xi^3)/(1-3\xi^2) = \mathrm{tg}(3\alpha)$.

7.12. Legyen X sűrűségfüggvénye $\frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+x}$ a $[0,1]$ intervallumon és 0 egyébként. Mi lesz $\frac{1}{X}$ törtrészének sűrűségfüggvénye?

7.13. (a) Legyen X standard Cauchy-eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy ekkor X és $1/X$ azonos eloszlásúak.

(b) Mutassuk meg, hogy a fenti tulajdonság az

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/4 & \text{ha } |t| \le 1 \\ 1/(4x^2) & \text{ha } |t| > 1 \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű Y valószínűségi változóra is igaz, vagyis $1/Y$ eloszlása megegyezik Y eloszlásával.

7.14. Legyen X normális eloszlású valószínűségi változó, aminek a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-(x+1)^2\right),$$

valamint $\Psi(x) = ax + b$ egy affin lineáris transzformáció, aminek az együtthatóit nem ismerjük, de azt tudjuk, hogy az $Y = \Psi(X)$ transzformált valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$g(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-4y^2 + 4y - 1\right).$$

Egyértelműen megmondható-e ebből a és b értéke? Karakterizálja a lehetséges (a,b) párok halmazát.

7.15. Egy l hosszú ropit találomra (egyenletes eloszlással választott pontban) kettétörünk.

(a) Jelöljük X-szel az így kapott két rész hosszainak négyzetösszegét. Határozzuk meg az X valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét.

(b) Jelöljük Y-nal a két részből képezett téglalap területét. Határozzuk meg az Y valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét.

7.16. Egy egységnyi hosszúságú ropit véletlenszerűen (egyenletes eloszlás szerint) kettétörünk, jelölje X a két rész hosszainak köbösszegét. Határozzuk meg az X valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

7.17. Legyen X egyenletes eloszlású a $[-3,4]$ intervallumon, és legyen $\Psi(x) = |x-1| + |x+1|$. Határozza meg az $Y = \Psi(X)$ valószínűségi változó $G(y)$ eloszlásfüggvényét. Abszolút folytonos eloszlású-e Y? Adja meg a G eloszlásfüggvény Lebesgue-féle felbontását diszkrét, abszolút folytonos és folytonos de szinguláris eloszlásfüggvények összegére.

8. Várható érték, szórás, kovariancia

8.1. Számolja ki az exponenciális eloszlás szórását.

8.2. Legyenek X és Y független azonos eloszlású nemnegatív valószínűségi változók. $\mathbf{E}(\frac{X}{X+Y}) =?$

8.3. Legyenek X és Y olyan valószínűségi változók, amelyek csak két értéket vehetnek fel. ($\mathrm{Ran}(X) = \{x_1, x_2\}, \mathrm{Ran}(Y) = \{y_1, y_2\}$.) Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ (azaz X és Y korrelálatlanok), akkor X és Y függetlenek is. (A korrelálatlanság általában nem implikálja a függetlenséget!)

8.4. Dobókockával dobunk. Jelölje X azt a számot, ahányadik dobásra először jön ki a hatos, Y pedig azt, ahányadikra másodszor. Határozzuk meg az $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(Y)$, $\mathbf{D}^2(X)$, $\mathbf{D}^2(Y)$ és $\mathbf{Cov}(X,Y)$ mennyiségeket.

8.5. Egy urnában N golyó van, 1-től N-ig számozva. Visszatevéssel húzunk golyókat az urnából mindaddig, amíg mindegyik golyót legalább egyszer ki nem húzzuk. Jelölje X a szükséges húzások számát. Határozzuk meg $\mathbf{E}(X)$-et és $\mathbf{D}^2(X)$-et.

8.6. (a) Hatszor dobunk egy kockával. Határozzuk meg a *különböző* eredmények számának várható értékét és szórásnégyzetét.

(b) Addig dobunk egy kockával. amíg négy *különböző* eredményt nem látunk. Határozzuk meg a szükséges dobások számának várható értékét és szórásnégyzetét.

(c) Addig dobunk egy kockával. amíg két egymás utáni dobásnak ugyanaz az eredménye. Határozzuk meg a szükséges dobások számának várható értékét és szórásnégyzetét.

8.7. Legyen az (X,Y) pont egyenletes eloszlású az $(1,1)$ középpontú, 1 sugarú körön. Mennyi $\mathbf{Cov}(X,Y)$?

8.8. 32 lapos magyarkártya-paklit úgy keverek, hogy a legfelső lapot egyenletes eloszlással választott helyre dugom a többi lap közé (akár alulra is), majd ezt ismételgetem. Várhatóan hány lépés múlva kerül az eredetileg legalsó lap legfelülre?

8.9. Adjon példát olyan X abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változóra, amelynek

(a) nem létezik a várható értéke,

(b) létezik a várható értéke, de nem létezik szórása,

(c) létezik a $\mathbb{E}(X^k)$ ún. k-adik momentuma, ha $k = 1, 2, \ldots, K$, de nem létezik, ha $k = K+1, K+2, \ldots$.

8.10. A $J = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ integrál kiszámításához (ahol $0 \le g(x) \le 1$) a következő ún. Monte Carlo-módszert használhatjuk: legyen X és Y két független egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumon. Legyen $U = \mathbb{1}(Y \le g(X))$, vagyis U értéke 1, ha $Y \le g(X)$, egyébként 0, továbbá $V = g(X)$, és $W = \frac{1}{2}(g(X) + g(1-X))$. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}(U) = \mathbf{E}(V) = \mathbf{E}(W) = J$, illetve $\mathbf{D}(W) \le \mathbf{D}(V) \le \mathbf{D}(U)$, vagyis J-nek W a három közül a leghatásosabb becslése.

Útmutatás: Használjuk a Schwarz-egyenlőtlenséget.

8.11. (a) Legyen $X \ge 0$ abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^\infty \mathbf{P}(X \ge x)\,\mathrm{d}x$$

(b) Számoljuk ki két független $\lambda = \frac{1}{2}$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó maximumának várható értékét a fenti képlet segítségével.

8.12. Konstruálható-e olyan folytonos $g : [0,1] \to [0,\infty)$ függvény, amelyre $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int_0^1 x \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = a$, $\int_0^1 x^2 \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = a^2$?

8.13. Rögzítsük az A és B pontokat a síkon, valamint válasszuk a P pontot egyenletes eloszlással az S halmazból, melynek súlypontja G, és teljes egészében az A és B által meghatározott egyenes egyik oldalán helyezkedik el. Lássuk be, hogy ekkor $\mathbb{E}|ABP| = |ABG|$.

Egzisztenciabizonyítások

8.14. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és $X \in L_1(\Omega, \mathbb{P})$ (azaz legyen $\mathbf{E}(|X|) < \infty$). Lássa be, hogy

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}(X) \le X) > 0.$$

8.15. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges véges gráf ponthalmazát fel lehet úgy bontani két diszjunkt részhalmazra, hogy a gráf éleinek legalább fele eközött a két ponthalmaz között menjen.

8.16. Legyenek $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ egység hosszú vektorok $\mathbb{R}^k$-ból. Mutassuk meg, hogy van olyan $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ előjelezés (azaz $\varepsilon_i = 1$ vagy $\varepsilon_i = -1$), hogy

$$||\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot \mathbf{v}_i|| \leq \sqrt{n}.$$

8.17. Egy egységkör alakú ketrecben van egy $3\pi + \varepsilon$ hosszúságú kígyó. Bizonyítsuk be, hogy rá lehet lőni úgy egy puskával a ketrecen kívülről a kígyóra, hogy legalább négyszer üsse át a golyó.

Indikátorok összege

8.18. Egy társaságban 60 ember van. Határozzuk meg azon napok számának várható értéket, amelyeken a társaság $0, 1, 2, 3$, ill. 4 tagjának van születésnapja.

8.19. Egy $l = 3.5$ cm hosszú tűt dobunk véletlenszerűen egy 1 cm vonaltávolságú négyzethálóra. Határozzuk meg a ledobott tű által átmetszett hálóvonalak számának várható értékét. (Használjuk fel Buffon tűproblémájának megoldását.)

8.20. Véletlenszerűen elhelyezünk egy huszárt egy üres sakktáblára. Mennyi a lehetséges lépései számának a várható értéke?

8.21. Egy hibátlan kockával dobunk tízszer. Jelölje X azt a számot, ahányszor páros dobást páratlan követ. Mennyi X várható értéke és szórása?

8.22. Lássa be a következő azonosságot oly módon, hogy valószínűségszámítási jelentést ad neki:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{2} \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2}.$$

8.23. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és $A_i \in \mathcal{F} \;\; i = 1, \dots, n$ tetszőleges események. Legyen $\mathbb{1}(\omega \in A_i)$ az i-edik esemény indikátora, vagyis 1 ha $\omega \in A_i$ és 0 egyébként. Röviden indokolja az alábbi azonosságokat:

(a) $1 - \mathbb{1}(\omega \in A_i) = \mathbb{1}(\omega \in \overline{A_i})$,

(b) $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}(\omega \in A_i) = \mathbb{1}(\omega \in \cap_{i=1}^{n} A_i)$,

(c) $\mathbb{E}(\mathbb{1}(\omega \in A_i)) = \mathbb{P}(A_i)$.

Ezek felhasználásával számítsa ki kétféleképpen a

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}(\omega \in A_i))\right)$$

várható értéket, és vezesse le ebből a szitaformulát.

8.24. n-szer dobunk egy kockával. Jelölje X ill. Y a dobott egyesek, illetve hatosok számát. Számoljuk ki $\mathbf{Cov}(X, Y)$-t.

8.25. Egy hibátlan érmével dobunk tízszer. Jelölje X ill. Y a dobott *fej*ek illetve *írás*ok számát. Számoljuk ki a $Z := XY$ valószínűségi változó várható értékét és szórását.

8.26. Tizenkét ember beszáll egy liftbe a földszinten. Egymástól függetlenül választanak célállomást az épület tíz emelete közül egyenletes eloszlással. Határozzuk meg a lift megállásai számának várható értékét és szórásnégyzetét.

8.27. Az asztrológusok kerekasztala húsz emberből áll. A csillagok törvényeit vizsgálva azt állapítják meg, hogy egy oroszlánnak szerencsét hoz, ha a jobbján egy mérleg ül. Határozza meg a szerencsés oroszlánok számának várható értékét és szórásnégyzetét.

8.28. A Lettországi Lottó szabályai: akárcsak nálunk, a lottóurna kilencven golyót tartalmaz, de a szelvényen tíz számot lehet megjelölni, és harminc nyerőszámot húznak. Bizonyítsa be, hogy egy szelvény tetszőleges kitöltése esetén a találatok számának várhatóértéke $10 \cdot \frac{30}{90}$ és szórásnégyzete

$$\frac{20}{9} + \frac{30 \cdot 29}{89} - 10.$$

8.29. 50 egyforma felkészültségű diák mindegyike 5 vizsgával próbálkozik a vizsgaidőszakban. Mindegyik (gonosz) vizsgáztató eleve elhatározta, hogy pontosan 5-5 diákot megbuktat, áldozataikat véletlenszerűen és egymástól függetlenül választva ki. (Egy peches diák, persze több vizsgán is elhasalhat.) Mennyi a vizsgaidőszak során sikeres (azaz egyik vizsgáján sem bukó) diákok számának várható értéke és szórásnégyzete?

8.30. Öt ember száll egy tízemeletes ház liftjébe. Egymástól függetlenül és egyenletesen választanak célállomást a tíz közül. Jelölje X azon emeletek számát, ahol megáll a lift, és Y az ötödik emeleten kiszálló emberek számát. Számítsa ki X és Y kovarianciáját.

8.31. Egymás után tízszer dobunk egy egy hamis érmével, ami p valószínűséggel fej és $1-p$ valószínűséggel írás. Legyen X az egymás utáni egyforma kimenetelekből álló sorozatok száma, vagyis pl. csupa fej esetén $X=1$, a FFIIIIIFIFF sorozatnál pedig $X=5$. Határozzuk meg X várható értékét és szórását!

8.32. Egy börtönben 100 rabot őriznek külön cellákban. A börtönőr hatalmas kulcscsomóján lévő 100 kulcs mindegyike egy-egy cella ajtaját nyitja. Minden cellához van kulcsa, és minden kulcs pontosan egy ajtót nyit, de a kulcsokat kinézet alapján nem lehet megkülönböztetni. Jó magaviseletért a börtönőr körbejár, és véletlenszerűen kiosztja a kulcsokat a rabok között. Ha egy rab ki tudja nyitni a kulcsával a cellaajtót, akkor szabadul.

(a) Mi a valószínűsége, hogy az első rab kiszabadul? (1 pont)

(b) Mennyi az így kiszabaduló rabok várható száma? (1 pont)

(c) Mennyi a kiszabaduló rabok számának szórásnégyzete? (2 pont)

8.33. Véletlenszerűen elhelyezünk 8 bástyát egy sakktáblára. (Egy mezőre legfeljebb egy bástya kerülhet.) Jelölje X azon bástyák számát, amiket másik bástya nem tud leütni, Y pedig az üres oszlopok számát. Számoljuk ki $\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(Y), \mathbf{D}^2(X), \mathbf{D}^2(Y), \mathbf{Cov}(X,Y)$ értékét! (Egy bástya azokat a bábukat tudja leütni, amelyek vele egy sorban vagy oszlopban vannak.)

8.34. Legyen az i-edik háremhölgy szépsége X_i, ahol $X_1, X_2, \ldots, X_n$ függetlenek és egyenletes eloszlásúak a $[0,1]$ intervallumon. Jelölje Y azon hölgyek számát, akik szebbek a közvetlenül előttük elvonuló hölgynél. Határozzuk meg Y várható értékét és szórásnégyzetét.

Valószínűségi változók függvényeinek várható értéke

8.35. Számoljuk ki az $\mathrm{E}(-1,1)$, $N(m,\sigma)$, $\mathrm{EXP}(\lambda)$ eloszlások momentumait. (Adjunk zárt formulát $k \in \mathbb{N}$-re.) Kommentáljuk a momentumok aszimptotikus viselkedését, mikor $k \to \infty$.

8.36. Válasszunk két pontot függetlenül és egyenletesen az egységkör kerületén. Határozzuk meg a távolságuk várható értékét és szórását.

8.37. Meghatározandó az $\vec{X}$ és $\vec{Y}$ véletlen vektorok által definiált parallelogramma területének várható értéke a következő két esetben:

(a) $\vec{X} := \vec{OA}$, $\vec{Y} := \vec{OB}$, ahol A és B a sík egységkörének kerületén egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölt véletlen pontok.

(b) $\vec{X} := \vec{OA}$, $\vec{Y} := \vec{OB}$, ahol A és B a tér egységgömbjének felszínén egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölt véletlen pontok.

8.38. Legyen X standard Cauchy-eloszlású, melynek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{E}(|X|) = \infty$, de bármely $\varepsilon > 0$-ra $\mathbf{E}(|X|^{1-\varepsilon}) < \infty$. Számoljuk ki a $\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\varepsilon \mathbf{E}(|X|^{1-\varepsilon})\right\}$ határértéket (pl. a rendőrelv segítségével).

8.39. Egy $\mathbb{N}$-értékű X valószínűségi változó *generátorfüggvénye*

$$g_X : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad g_X(z) := \mathbf{E}(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{P}(X=k).$$

(A generátrofüggvény analitikusan kiterjeszthető a komplex sík $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ nyílt egységkörére.) Számoljuk ki a binomiális, Poisson- és geometriai eloszlások generátorfüggvényét.

8.40. Egy $\mathbb{N}$-értékű X valószínűségi változó k-adik *faktoriális momentuma* $\mathbf{E}\left(X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1)\right)$. Sok esetben a faktoriális momentumokat könnyebb kiszámolni, mint a momentumokat, de nyilvánvaló, hogy minden $k \in \mathbb{N}$-re a k-adik momentum kifejezhető az első k faktoriális momentum segítségével. Számoljuk ki a binomiális, Poisson- és geometriai eloszlások faktoriális momentumait. (Adjunk zárt kifejezést tetszőleges $k \in \mathbb{N}$-re.)

8.41. Egy tetszőleges X valószínűségi változó *karakterisztikus függvénye* $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\varphi_X(t) := \mathbf{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, \mathrm{d}F_X(x)$. (Az integrál abszolút konvergens – ergo: a karakterisztikus függvény jól értelmezett – bármely valószínűségi változóra.) Számoljuk ki a $\mathrm{BIN}(p,n)$, $\mathrm{POI}(\lambda)$, $\mathrm{GEO}(p)$, $\mathrm{E}(a,b)$, $\mathrm{N}(m,\sigma)$, $\mathrm{EXP}(\lambda)$, $\mathrm{CAU}(m,b)$ eloszlások karakterisztikus függvényét.

8.42. Legyen X_λ Poisson-eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke $\mathbf{E}(X_\lambda) = \lambda$. Számoljuk ki az $Y_\lambda := \sqrt{X_\lambda}$ valószínűségi változó szórásának határértékét, amint $\lambda \to \infty$. Segítség: A Poisson eloszlás korlátlanul osztható.

Feltételes várható érték

8.43. Számítsa ki a geometriai eloszlás várható értékét az örökifjú tulajdonság segítségével.

8.44. Legyen $X \sim \mathrm{BIN}(n,p)$ binomiális eloszlású. Adjon szemléletes jelentést a következő képletnek:

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1-q^{n+1}}{(n+1)p}.$$

8.45. Egy véletlen pontot a a következőképpen választunk ki a síkon. Feldobunk egy érmét. Ha az eredmény fej, egyenletes eloszlással választunk egy pontot a $[0,1] \times [0,1]$ négyzetből. Ha az érmedobás eredménye írás, egyenletes eloszlással választunk pontot a $[-1,0] \times [-1,0]$ négyzetből. A kiválaszott pont Descartes-féle koordinátáit jelöljük (X,Y)-nal. Határozzuk meg $\mathbf{E}(X)$-et, $\mathbf{E}(Y)$-t, $\mathbf{D}^2(X)$-et, $\mathbf{D}^2(Y)$-t és $\mathbf{Cov}(X,Y)$-t.

8.46. Aladár, Béla, Cili és Dömötör kockáznak: mindannyian egyszer dobnak két kockával, és az a személy, aki a legnagyobb összeget dobja, nyer 120 petákot. Ha többen dobják ugyanazt a legnagyobb összeget, egyenlően osztoznak a 120 petákon. Ha Aladár dobott számainak összege 9, mennyi a nyereményének (feltételes) várható értéke? (Van szép megoldás!)

8.47. Egy urnában a darab fehér és b darab piros golyó van. Visszatevés nélkül addig húzunk, amíg fehér golyót nem találunk. Mennyi az addig kihúzott piros golyók számának várható értéke és szórásnégyzete?

8.48. Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ független és azonos eloszlású diszkrét valószínűségi változók, legyen $m \leq n$ esetén $S_m = \sum_{i=1}^m X_i$. Lássa be, hogy

$$\mathbf{E}(S_m | S_n = k) = \frac{m \cdot k}{n}$$

Bernstein-polinom

8.49. Egy $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény n-edrendű Bernstein-polinomjának nevezzük azt a $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényt, aminek a helyettesítési értéke a $p \in [0,1]$ helyen

$$g(p) = \mathbf{E}\left(f\left(\frac{X_{n,p}}{n}\right)\right)$$

ahol $X_{n,p} \sim \mathrm{BIN}(n,p)$. Határozza meg a következő függvények 100-adrendű Bernstein-polinomját, és $\sup_{0 \leq p \leq 1} |f(p) - g(p)|$ értékét:

(a) $f(p) = 2p + 1$

(b) $f(p) = p^2$

8.50. Határozza meg az $f(p) = e^p$ függvény n-edrendű Bernstein-polinomját és adjon becslést $\sup_{0 \leq p \leq 1} |f(p) - g(p)|$ értékére a logaritmusfüggvény sorfejtésének segítségével.

8.51. Lássa be valószínűségszámítási módszerekkel, hogy monoton növő függvény Bernstein-polinomja is monoton növő.

Csebisev-egyenlőtlenség

8.52. Mikor éles az $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \lambda) \leq \mathbf{D}^2(X)/\lambda^2$ egyenlőtlenség?

8.53. A IV/b osztály tanulói karácsonykor megajándékozzák egymást: mindenki felírja a nevét egy cetlire, amit beletesznek egy kalapba és jól megkevernek, majd mindenki kihúz egy cetlit, és ajándékot ad annak, akinek a nevét a cetlin látja. Jelölje X azon diákok számát, akik önmagukat húzták. Lássa be a Csebisev-egyenlőtlenség segíségével, hogy

$$\mathbb{P}(|X - 1| \geq 2) \leq \frac{1}{4}.$$

8.54. Feldobunk egy érmét hatvanszor, jelölje a fejek számát X. Adjunk felső becslést a $\mathbf{P}(|X - 30| \geq 20)$ valószínűségre a Csebisev-egyenlőtlenség segítségével! Jobb becslés is adható az exponenciális Markov-egyenlőtlenség segítségével:

(a) Legyen $Y_\beta = e^{\beta X}$, ahol $0 < \beta$. Lássa be, hogy $\mathbf{E}(Y_\beta) = 2^{-60}(1 + e^\beta)^{60}$.

(b) Adjon felső becslést a $\mathbf{P}(X \geq 50)$ valószínűségre olymódon, hogy a Markov-egyenlőtlenséget alkalmazza az Y_β nemnegatív valószínűségi változóra.

(c) Keresse meg azt a β-t, amelyikre az előbbi becslés a legélesebb. (A feladat visszavezethető az $f(\beta) = \log(1 + e^\beta) - \frac{5}{6}\beta$ konvex függvény minimalizálására.)

(d) Lássa be, hogy $\mathbf{P}(|X - 30| \geq 20) \leq 2 \cdot 3^{60} \cdot 5^{-50} < 10^{-6}$

9. Többdimenziós együttes eloszlások

Többdimenziós eloszlásfüggvény definíciója, peremeloszlások

9.1. Általánosítsuk a kétdimenziós valószínűségi változók együttes eloszlásáról tanultakat (különös tekintettel a monotonságra és a limeszekre), és adjuk meg $n > 2$ valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvényének tulajdonságait.

9.2. Mutassunk példát olyan kétváltozós $F(x, y)$ függvényre, amely rendelkezik az eloszlásfüggvények tulajdonságaival az erős monotonitást kivéve (balról folytonos és $\pm\infty$-ben a megfelelő határértéke van), de mindkét változójában külön-külön monoton nemcsökkenő. Miért nem lehet egy ilyen függvény együttes eloszlásfüggvény?

9.3. Együttes eloszlásfüggvény-e a következő két függvény:

$$F(x, y) = \exp(-e^{-(x+y)}), \qquad G(x, y) = \exp(-e^{-x} - e^{-y})?$$

9.4. Legyenek $F(x)$ és $G(y)$ egydimenziós valószínűségi eloszlásfüggvények és $\alpha \in [-1, 1]$ rögzített. Bizonyítsuk be, hogy

$$H(x, y) = F(x)G(y)\,(1 + \alpha(1 - F(x))(1 - G(y)))$$

együttes eloszlásfüggvény, amelynek marginálisai $F(x)$, illetve $G(y)$.

Útmutatás: Könnyebb belátni, ha feltesszük, hogy a valószínűségi változóink abszolút folytonosak.

9.5. Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye:

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x + xy + y) & \text{ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a peremeloszlásokat.

9.6. Legyen (X, Y) az $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ egységkörben véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) választott pont koordinátapárja. Határozzuk meg a peremeloszlások sűrűségfüggvényét.

Valószínűségi vektorváltozók kovarinanciamátrixa

9.7. Legyen $\vec{X}$ egy n dimenziós véletlen vektor, aminek várható érték vektora $\mathbf{m}$ és kovarianciamátrixa $\mathbf{C}$, és legyen A egy k-szor n-es mátrix. Határozza meg az $\vec{Y} = A\vec{X}$ k-dimenziós vektorváltozó várható érték vektorát és kovarianciamátrixát.

9.8. Vezesse le a Schwarz-egyenlőtlenséget a két valószínűségi változó kovarianciamátrixának determinátsára nézve.

9.9. Lássa be, hogy valószínűségi változók kovarianciamátrixa akkor és csak akkor szinguláris, ha majdnem biztosan lineáris összefüggés van a valószínűségi változók között.

9.10. Legyenek X és Y függetlenek és egyenletes eloszlásúak a $[-1, 1]$ intervallumon. Legyenek $U_\theta = cos(\theta) \cdot X + sin(\theta) \cdot Y$ és $V_\theta = -sin(\theta) \cdot X + cos(\theta) \cdot Y$.

(a) Határozza meg X és Y kovarianciamátrixát!

(b) A θ paraméter mely értékei esetén lesznek U_θ és V_θ korellálatlanok?

(c) A θ paraméter mely értékei esetén lesznek U_θ és V_θ függetlenek?

9.11. Határozzuk meg X és Y kovarianciamátrixát, ahol X egy $\lambda = 2$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó és $Y = 2X + 1$.

9.12. Legyenek W és Z olyan valószínűségi változók, amikre $\mathbf{E}(W) = 1$ és $\mathbf{E}(Z) = -2$, valamint legyen a kovarianciamátrixuk $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Mutassuk meg, hogy van olyan $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, amire

$$\mathbf{P}(Z - \phi(W) = 0) = 1.$$

9.13. Legyen az (X, Y) pont egyenletes eloszlású a $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, -1)$ pontok által meghatározott háromszögben.

(a) Mi lesz az (X, Y) kétdimenziós eloszlás kovarianciamátrixa?

(b) Legyen $Z = X + 2Y$. Mi lesz az (X, Z) kétdimenziós eloszlás kovarianciamátrixa?

Valószínűségi vektorváltozók függvényei, többdimenziós eloszlástranszformációk

9.14. Legyen X és Y két független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy az $U := X + Y$ és $V := X/(X + Y)$ valószínűségi változók függetlenek.

9.15. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye legyen $h(x, y) = f(x)f(y)$ alakú, ahol $f(x)$ egydimenziós sűrűségfüggvény. Legyen $U = \max\{X, Y\}$ és $V = \min\{X, Y\}$. Határozzuk meg U és V együttes eloszlásfüggvényét és ennek sűrűségfüggvényét.

9.16. Legyenek X, Y és Z független valószínűségi változók. Legyen X, ill. Y eloszlásfüggvénye $F(x)$, ill. $G(x)$, és legyen $\mathbf{P}(Z = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(Z = 0)$. Határozzuk meg a következő valószínűségi változók eloszlásfüggvényeit:

$$T := ZX + (1 - Z)Y, \qquad U := ZX + (1 - Z)\max\{X, Y\}, \qquad V := ZX + (1 - Z)\min\{X, Y\}.$$

9.17. Legyenek X, Y és Z független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

(a) Határozzuk meg az $S := Y - X$ és $T := Z - Y$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét.

(b) Határozzuk meg az $U := [X]$ és $V := X - [X]$ valószínűségi változók együttes eloszlását.

9.18. Legyenek X és Y független $\mathrm{CAU}(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy $Z := (X + Y)/(1 - XY)$ is $\mathrm{CAU}(0, 1)$ eloszlású.

Útmutatás: Használjuk a $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = (\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta)/(1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta)$ azonosságot, és azt a tényt, hogy ha ξ egyenletes eloszlású a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon, akkor $\mathrm{tg}\,\xi$ standard Cauchy-eloszlású.

9.19. Legyen X és Y két független egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumon. Határozza meg az XY szorzatként előálló új változó sűrűségfüggvényét.

9.20. Legyenek X, Y és Z függetlenek és egyenletes eloszlásúak a $[0,1]$ intervallumon. Legyen $U = X + Y$ és $V = Y + Z$. Számítsa ki U és V együttes sűrűségfüggvényének értékét az $(u = 0.9, v = 1.2)$ pontban.

9.21. (a) A $[0,1]$ intervallumban egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölünk két véletlen pontot. Meghatározandó távolságuk eloszlás- és sűrűségfüggvénye.

(b) Egységnyi oldalhosszú négyzet belsejében egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölünk két véletlen pontot. Meghatározandó távolságuk eloszlás- és sűrűségfüggvénye.

9.22. Az α paraméterű standard gamma eloszlás sűrűségfüggvénye

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}e^{-x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

ha $\alpha = 1, 2, \ldots$ egész paraméter. Legyen G_1 és G_2 két független α ill. β paraméterű gamma eloszlású valószínűségi változó. Képezzük az $X = G_1 + G_2$ és $Y = G_1/(G_1 + G_2)$ valószínűségi változókat. Mutassuk meg, hogy

(a) X ekkor $\alpha + \beta$ paraméterű gamma eloszlású,

(b) Y ún. béta eloszlású, melynek sűrűségfüggvénye

$$f(y) = \frac{(\alpha-1)!(\beta-1)!}{(\alpha+\beta-1)!}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1,$$

(c) X és Y függetlenek.

9.23. Legyenek X és Y független, abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók, sűrűségfüggvényeiket jelölje f és g. Legyen $Z := X/Y$, és jelölje Z sűrűségfüggvényét h.

(a) Mutassuk meg, hogy
$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(zy)\,|y|\,g(y)\,\mathrm{d}y.$$

(b) Milyen eloszlású lesz Z, ha X és Y standard normális eloszlásúak?

Feltételes várható érték

9.24. Legyen X egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumon, Y pedig egyenletes eloszlású a $[0, X]$ intervallumon. Számítsuk ki a $\mathbb{E}(Y|X = x)$ és $\mathbb{E}(X|Y = y)$ feltételes várható értékeket.

9.25. Jelölje D az origó középpontú egységkörlap és a $(2,1)$ középponttú $\frac{1}{2}$ sugarú körlap unióját. Legyen (X, Y) a D-ben egyenletes eloszlás szerint választott véletlen pont koordinátapárja. Határozzuk meg a peremeloszlások sűrűségfüggvényét, továbbá X és Y várható értékét.

9.26. Dobok egy dobókockával. Ha az eredmény i, akkor folytonos egyenletes eloszlás szerint választok egy számot a $(0, i)$ intervallumon.

(a) Mi lesz a kapott szám eloszlásfüggvénye, első és második momentuma?

(b) Ha a kísérletet tízszer megismétlem, mi lesz a kapott számok maximumának eloszlásfüggvénye?

9.27. Egység hosszúságú autók véletlenszerűen parkolnak egymás után az utcán úgy, hogy amikor egy új kocsi érkezik és leparkol valahová, akkor a középpontja a rendelkezésre álló pozíciók halmazán (ez néhány intervallum uniója) egyenletes eloszlású. Jelölje $m(x)$ az így elhelyezhető autók számának várható értékét egy x hosszúságú utcaszakaszon. Mutassa meg, hogy

$$m(x+1) = \frac{1}{x}\int_0^x (m(y) + m(x-y) + 1)\ \mathrm{d}y.$$

10. Normális eloszlás

Egydimenziós normális eloszlás

10.1. Legyen $X \sim \mathrm{N}(0,1)$, azaz standard normális eloszlású valószínűségi változó. Az alábbi valószínűségpárok közül melyik a nagyobb?

(a) $p_1 = \mathbf{P}(|X| \le 0.7)$, $p_2 = \mathbf{P}(|X| \ge 0.7)$.

(b) $q_1 = \mathbf{P}(-0.5 \le X \le -0.1)$, $q_2 = \mathbf{P}(1 \le X \le 2)$.

10.2. Egy ember vonattal és távolsági autóbusszal utazik a munkahelyére. *Menetrend szerint* a vonat 7:30-kor érkezik, a busz pedig 7:37-kor indul. Az átszállás két percet vesz igénybe. A vonat valódi érkezési ideje *normális eloszlású* valószínűségi változó, melynek várható értéke 7:30-kor van és szórása 4 perc. Az autóbusz valódi indulási ideje a vonat érkezésétől független, szintén normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 7:37-kor van, szórása pedig 3 perc. Mennyi annak a valószínűsége, hogy emberünk a hét öt munkanapja közül legfeljebb egy alkalommal késse le a buszcsatlakozást?

10.3. (a) Tudva, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2)dx = \sqrt{2\pi}$, számoljuk ki a következő integrált

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 + bx + c)\,\mathrm{d}x$$

ahol a valós és pozitív, b és c pedig tetszőleges valós (vagy komplex) konstansok.

(b) Ennek segítségével számoljuk ki a lognormális eloszlás momentumait. (Ha $X \sim \mathrm{N}(m,\sigma)$, akkor $e^X \sim \mathrm{LN}(m,\sigma)$ lognormális eloszlású.)

10.4. Valamely homokfajta részecskéi gömb alakúak, melyeknek átmérője (milliméterben mérve) lognormális eloszlású $m = -0.5$ és $\sigma := 0.3$ paraméterekkel. Az egész homokmennyiség hány *súlyszázalék*a áll 0.5 mm-nél kisebb átmérőjű szemcsékből? Adjon explicit numerikus választ a normális eloszlás eloszlásfüggvényének felhasználásával!

10.5. Legyenek $X \sim \mathrm{LN}(m_1,\sigma_1)$ és $Y \sim \mathrm{LN}(m_2,\sigma_2)$ független lognormális eloszlású valószínűségi változók. Milyen eloszlású XY?

10.6. Számoljuk ki a normális eloszlás alább definiált *abszolút momentum*ait:

$$A_k := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)|y|^k\,\mathrm{d}y, \qquad k = 1,2,3,\ldots.$$

Útmutatás: Páros $k = 2l$-re számoljuk ki és használjuk a következő kifejezést:

$$\frac{d^l}{d\lambda^l}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2/2}\,\mathrm{d}y\bigg|_{\lambda=1}.$$

Páratlan $k = 2l+1$-re hajtsuk végre a $z = y^2$ változócserét az A_k-t definiáló integrálban.

10.7. Ellenőrizzük a következő két hatványsorfejtés érvényességét, és mutassuk ki, hogy konvergenciasugaruk végtelen:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)!2^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1};$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x - \frac{1}{2\cdot 1!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{4\cdot 2!}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{8\cdot 3!}\frac{x^7}{7} + \ldots\right).$$

10.8. Legyen X nulla várható értékű és σ szórású normális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $x > 0$ esetén fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x^2/2\sigma^2)}\left(\frac{\sigma}{x} - \frac{\sigma^3}{x^3}\right) \quad < \quad \mathbf{P}(X > x) \quad < \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x^2/2\sigma^2)}\frac{\sigma}{x}.$$

Útmutatás: Differenciáljuk az egyenlőtlenséglánc mindhárom tagját, és hasonlítsuk össze a deriváltakat.

10.9. A kóbor kutyák átlagos testsúlya 40 kg, a testsúlyok szórása pedig 20 kg. A sintérek által a kutyák elfogására használt háló elszakad, ha a kutya 60 kilósnál nehezebb, és a 20 kilósnál kisebb kutyák pedig ki tudnak bújni belőle. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kutya testsúlya az átlagtól nem tér el 20 kg-nál többel, és így biztonsággal el lehet kapni a hálóval, ha

(a) a testsúly $\mathrm{N}(40, 20)$ normális eloszlású;

(b) a testsúly $\mathrm{LN}(m, \sigma)$ lognormális eloszlású.

A két modell közül melyik valószerűbb?

10.10. Legyen X valószínűségi változó $\mathrm{N}(0,1)$ (azaz standard normális) eloszlású. Határozzuk meg a következő várható értékeket és szórásnégyzeteket:

(a) $\mathbf{E}(X\cos(X))$, $\mathbf{E}(X/(1+X^2))$, $\mathbf{E}(\sin(X))$;

(b) $\mathbf{E}(\cos(X))$, $\mathbf{D}^2(\cos(X))$, $\mathbf{D}^2(\sin(X))$.

10.11. Legyen X és Y egymástól független standard normális valószínűségi változó. Számoljuk ki $\mathbf{Cov}\left(\cosh(X), \sinh(X)\right)$ értékét.

10.12. Legyen X $\mathrm{N}(0,1)$ eloszlású valószínűségi változó és $Y := \mathrm{sign}(1-|X|)\cdot X$.

(a) Határozzuk meg az Y valószínűségi változó eloszlását.

(b) $Z := X + Y$ eloszlása normális-e?

Többdimenziós normális eloszlás

10.13. (a) Legyen $(X_1, X_2, \ldots, X_d) \in \mathbb{R}^d$ (együttesen) normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó. Bizonyítsuk be, hogy ha korrelálatlanok (azaz páronkénti kovarianciájuk nulla), akkor (teljesen) függetlenek is. (Azaz együttes Gauss-eloszlás + korrelálatlanság $\Rightarrow$ függetlenség.)

(b) Bizonyítsa be, hogy ha X és Y független standard normális eloszlású valószínűségi változók, valamint a és b valós számok, akkor $U = aX + bY$ és $V = bX - aY$ valószínűségi változók is függetlenek. Milyen eloszlású lesz U és V?

10.14. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Legyen $Y_i := \sum_{j=1}^n b_{i,j}\cdot X_j$. Mit mondhatunk a $b_{i,j}$ elemekből alkotott B mátrixról, ha $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ val.változók is függetlenek és standard normális eloszlásúak?

10.15. Legyenek X_1, X_2 függetlenek és standard normális eloszlásúak. Legyen $i = 1,2$ esetén $Y_i := \sum_{j=1}^2 b_{i,j}\cdot X_j$. A $b_{i,j}$ elemekből alkotott B mátrixról tudjuk, hogy szimmetrikus és pozitív szemidefinit, valamint tudjuk, hogy Y_1, Y_2 együttes sűrűségfüggvénye $\frac{1250}{2\pi}\exp\left(-\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}{2}\right)$, ahol $A = \begin{pmatrix} 1300 & -900 \\ -900 & 1825 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg A sajátértékeit és egy ortonormált sajátbázisát. Írjuk fel az A mátrixot $A = U^T D U$ alakban, ahol U ortogonális és D diagonális. Határozzuk meg ebből a B mátrixot!

10.16. Legyenek X és Y független és azonos $\mathrm{N}(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg a

$$Z := e^{(X^2+Y^2)/2}(1 + X^2 + Y^2)^{-3/2}$$

valószínűségi változó várható értékét és szórását.

10.17. Legyenek X és Y független $\mathrm{N}(0,1)$ illetve $\mathrm{N}(0,2)$ eloszlású valószínűségi változók és M egy véletlenszerűen kiválasztott pont az $\mathbb{R}^2$ síkon, melynek koordinátái (X, Y). Határozzuk meg a következő események valószínűségét:

(a) $M \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1, |y| \le 2\}$,

(b) $M \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2, |y| \le 2\}$,

(c) $M \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4\}$,

(d) $M \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \le 0, |x| \le 1, y \ge -2\}$,

(e) $M \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y^2/4) \le 1\}$,

(f) $M \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y^2/4) \leq c^2\}$.

10.18. Egy folyó feletti híd téglalap alakú, melynek koordinátái Descartes-féle koordinátarendszerben eleget tesznek a következő feltételeknek: $|x| \leq 10$, $|y| \leq 100$ (valamilyen hosszegységekben). Tüzérségi támadás esetén a lövedék beesésének (X, Y) pontja (ugyanabban a koordinátarendszerben) kétdimenziós normális eloszlású független komponensekkel és $\sigma_X = 10$, $\sigma_Y = 40$ szórásokkal. Az $(\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(Y))$ koordinátájú pontot *célpont*nak nevezzük. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a lövedék eltalálja a hidat, ha a célpont:

(a) $(0, 0)$,

(b) $(10, 0)$,

(c) $(5, 20)$.

10.19. Legyen (X, Y) kétdimenziós normális eloszlású $(0, 0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy az (X, Y) koordinátájú véletlen pont a $(0, 3)$, $(4, 0)$, $(1.8, 5.4)$, $(5.8, 2.4)$ csúcsú téglalapba esik.

10.20. Legyen (X, Y) kétdimenziós normális eloszlású $(0, 0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak az események a valószínűségét, hogy az (X, Y) koordinátájú véletlen pont az ABC háromszögbe essék, a következő esetekben:

(a) $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (2, 0)$.

(b) $A = (0, 2)$, $B = (2, 0)$, $C = (2, 2)$.

(c) $A = (1, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (1, 1)$.

Útmutatás: Használjunk szimmetriákat!

10.21. Legyen (X, Y) kétdimenziós normális eloszlású $(0, 0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg az (X, Y) Descartes-koordinátájú pont (R, Θ) *polárkoordinátá*inak együttes eloszlását.

10.22. Meghatározandó az $\vec{X}$ és $\vec{Y}$ véletlen vektorok által definiált parallelogramma területének várható értéke, ha $\vec{X}$ és $\vec{Y}$ egymástól független standard Gauss-eloszlású kétdimenziós vektorváltozó. (Azaz az X_1, X_2, Y_1 és Y_2 függetlenek és $\mathrm{N}(0, 1)$ eloszlásúak.)

10.23. Legyen X és Y két független standard normális eloszlású valószínűségi változó.

(a) Tekintsük az (X, Y) véletlen pontot a síkon, és tekintsük az (U, V) transzformált valószínűségi változókat, ahol $U = X^2 + Y^2$ és $V = Y/X$. Bizonyítsuk be, hogy U eloszlása exponenciális, V eloszlása pedig standard Cauchy, és a két valószínűségi változó független.

(b) Számítsuk ki a $\mathbb{E}(X^2/R^2)$ és a

$$\mathbb{E}\left(\frac{\min(|X|, |Y|)}{\max(|X|, |Y|)}\right)$$

várható értékeket.

10.24. Legyen U_1, U_2 két független egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 1]$-en. Bizonyítsuk be, hogy ha $X = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$ és $Y = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2)$, akkor az (X, Y) pár kétdimenziós normális eloszlású.

10.25. Legyen $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ háromdimenziós véletlen vektor, amelynek komponensei független $\mathrm{N}(0, 1)$ eloszlásúak. Definiáljuk a következő véltozókat:

$$\varrho := \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}, \qquad \xi_i := X_i/\varrho, \quad i = 1, 2, 3.$$

(a) Határozzuk meg ϱ sűrűségfüggvényét.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ϱ és a $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ vektorváltozó egymástól függetlenek, továbbá azt, hogy a $\vec{\xi}$ véletlen vektor egyenletes eloszlású az egységgömb felszínén.

10.26. Legyen (X,Y) kétdimenziós normális eloszlású $(0,0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az (X,Y) koordinátájú véletlen pont beleesik az

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 3\}$ körgyűrűbe;

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \min(|x|,|y|) \leq \max(|x|,|y|) \leq 3\}$ tartományba;

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq |x|+|y| \leq 3\}$ tartományba.

10.27. Az $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ valószínűségi vektorváltozó legyen kétdimenziós normális eloszlású $\mathbf{m} = (-1,1)$ várhatóérték-vektorral és $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Számítsuk ki a $\mathbf{P}(X \geq -1, Y \geq 1)$ valószínűséget! Segítség: $\mathbf{C} = \mathbf{B}^2$, ahol $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10.28. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független és azonos $\mathrm{N}(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg k-nak azt a minimális értékét, amelyre $\mathbf{P}(\max(|X_1|,|X_2|,\ldots,|X_k|) \geq 2) \geq 1/2$.

11. De Moivre – Laplace centrális határeloszlás-tétel

11.1. Feldobunk egy szabályos érmét kétmilliószór. Lássa be a Stirling-formula felhasználásával, hogy

$$\mathbf{P}\,(\text{ugyanannyi fejet dobtunk, mint írást}) \approx \frac{1}{1000\sqrt{\pi}}.$$

11.2. Legyen $S_n \sim \mathrm{BIN}(n, p = \frac{1}{2})$. Lássa be Stirling-formula felhasználásával, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{n} \cdot \mathbf{P}\left(S_n = \lfloor \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{n} \cdot x \rfloor\right) = \varphi(x),$$

ahol φ jelöli a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét.

11.3. A bimomiális eloszlás normális de Moivre – Laplace-féle approximációjának felhasználásával számoljuk ki a következő kifejezés numerikus közelítését:

$$\binom{3600}{2376} 0.64^{2376} 0.36^{1224}.$$

11.4. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 10.000 véletlen számjegy között legfeljebb 968 darab 7-es fordul elő?

11.5. Mennyi annak a valószínűsége. hogy 12.000 kockadobás során előforduló hatosok száma 1900 és 2150 közé esik?

11.6. Határozzuk meg azt a k egész számot, amelyre igaz, hogy annak a valószínűsége, hogy 1000 érmedobás során a *fej*ek száma 490 és k közé esik, kb. 0.5.

11.7. 10.000 érmedobás során 5.400-szor volt *fej* az eredmény. Indokolt-e gyanakodnunk arra, hogy a használt érme hamis?

11.8. Hányszor kell egy érmével dobnunk ahhoz, hogy 0.99-nál nagyobb valószínűséggel a *fej* eredmények száma a dobások számának 49%-a és 51%-a közé essen?

11.9. Dömötör rulettezik a kaszinóban. Minden egyes körben 10 petákot tesz *piros*ra. 100 játék után 300 peták a vesztesége. Jogos-e a gyanúja, hogy svindliz a krupié? (A rulettkörön összesen 37 mező van 0-tól 36-ig számozva. Ezek közül egy (a 0 jelű) zöld, a fennmaradó 36-ból pedig 18 piros és 18 fekete.)

11.10. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 100.000 pókerleosztás során a fullok száma 128 és 158 közé essen.

11.11. Tekintsük a kavics-aprítás következő egyszerűsített modelljét: veszek egy három kilós követ, és ezerszer ráütök egy kalapáccsal. Minden kalapácsütésnél 0.064 valószínűséggel le sikerül pattintanom a megmaradt kődarab $\frac{1}{8}$ részét (és 0.936 valószínűséggel ép marad a kő). Mekkora az aprítás után kapott kavics súlyának várható értéke (grammban kifejezve)? Adjunk közelítő formulát a kavics nagyságának eloszlásfüggvényére!

11.12. Egy nagyváros lakosságának *általunk ismeretlen* p hányada dohányzik. Ezt a p hányadot akarjuk közelítőleg meghatározni egy mintában megfigyelt relatív gyakorisággal a következő módon: Megkérdezünk n véletlenszerűen kiválasztott lakost és megállapítjuk, hogy ezek között k állítja, hogy dohányzik. A NSZT-ből tudjuk, hogy ha n elég nagy, akkor az empirikusan megfigyelt $p' := k/n$ relatív gyakoriság igen nagy valószínűséggel jól közelíti az igazi p hányadot. Milyen nagynak kell n-et választanunk, ha azt akarjuk elérni, hogy az empirikusan megfigyelt p' relatív gyakoriság legalább 0.95 valószínűségggel 0.005 hibahatáron belül közelítse a valódi (ismeretlen) p hányadot? Más szóval határozzuk meg azt a legkisebb n_0 természetes számot, amelyre igaz, hogy bármely $p \in (0, 1)$-re és $n \geq n_0$-ra

$$\mathbf{P}(|p' - p| \leq 0.005) \geq 0.95.$$

11.13. Amerikai elnökválasztás előtt a Gallup közvéleménykutató társaság meg akarja becsülni a demokrata párti szavazók arányát New Hempshire és Texas államokban. Eleve tudják, hogy mindkét államban a demokrata párti szavazók aránya 40% és 60% között van. Céljuk, hogy mindkét államban az arányokat 0.99-nél nagyobb valószínűséggel, 2% hibahatáron belül állapítsák meg. New Hempshire államban 1.2 millió polgár jugosult szavazni, míg Texas államban 12 millió. E számok alapján statisztikusuk azt állítja, hogy Texasban kb. tízszer akkora mintát kell megfigyelni, mint New Hempshire-ben. Jó-e ez az okoskodás, vagy rúgják ki a statisztikust? Az utóbbi esetben kb. hányszor nagyobb mintát kell Texasban megfigyelni, mint New Hempshireben?

11.14. Játék előtt Aladár és Béla ellenőrízni akarják, hogy a használt dobókocka nem hamis-e. Jelöljük p-vel a hatos dobás (ismeretlen!) valószínűségét. Hányszor kell a játékosoknak próba-dobást végezniük, ahhoz, hogy az ismeretlen p értéket 0.97-nél nagyobb valószínűséggel, 0.01 hibahatáron belül megbecsüljék? Hogyan módosul a szükséges próbadobások száma, ha eleve tudják, hogy $0.1 < p < 0.2$?

11.15. Az ún. Monte Carlo-integrálás lényege a következő: legyen az egyszerűség kedvéért $f : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos függvény, és az

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

integrál értékét becsüljük. Ha U és V két független $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, akkor az (U, V) pár a $[0, 1]^2$ egységnégyzet egy véletlen pontját adja. Függetlenül generálva n véletlen pontot az egységnégyzetben, jelölje X_n azon pontok számát, amelyek az f függvény grafikonja alá estek, vagyis amelyekre $V < f(U)$. Ekkor I becslését az X_n/n hányados adja. Mekkorának válasszuk n értékét, ha azt szeretnénk, hogy az $f(x) = x^2$ függvényre alkalmazva a Monte Carlo-integrálás módszerét, legfeljebb 0.02 valószínűséggel kapjunk 0.1-nél nagyobb hibát?

11.16. Van két egyforma biztosítótársaság, egyenként tízezer ügyféllel. A 2007-es év elején minden ügyfél befizet a biztosítójának ötvenezer forintot, és az év folyamán minden ügyfél egymástól függetlenül $\frac{1}{3}$ valószínűséggel nyújt be kárigényt, amely minden esetben 150 ezer forintos. Mindkét biztosítótársaságnak van ezen felül 5 millió forint félretett pénze az előző évről. Egy biztosítótársaság csődbe megy, ha nem tudja kifizetni a beérkező kárigényeket.

Érdemes-e egyesülnie a két biztosítótársaságnak? Legyen p_1 annak a valószínűsége, hogy a két biztosítótársaság közül legalább egy tönkremegy, és p_2 annak a valószínűsége, hogy az egyesült biztosítótársaság tönkremegy. Határozza meg p_1 és p_2 (közelítő) értékét, és vonja le a következtetést!

11.17. (a) Az ellenfél gondol egy $X \sim \mathrm{BIN}(15, \frac{1}{4})$ eloszlású valószínűségi változóra. Ki akarjuk találni X-et. Mindössze egyszer tippelhetünk. Mi legyen az?

(b) Az ellenfél gondol egy $X \sim \mathrm{BIN}(15000, \frac{1}{4})$ eloszlású valószínűségi változóra. Most k-szor tippelhetünk. Körülbelül mekkora legyen k, hogy kiegyenlített legyen a játék?

11.18. Poisson-eloszlás normális approximációja: Bizonyítsuk be, hogy $\lambda \to \infty$ esetén

$$\sqrt{\lambda} p([\lambda + x\sqrt{\lambda}]; \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) + \mathcal{O}(\lambda^{-1/2}),$$

és a hibatag egyenletesen kicsi, ha x egy korlátos halmazban marad. Következményként lássuk be, hogy

$$\sum_{\lambda+\alpha\sqrt{\lambda}<k<\lambda+\beta\sqrt{\lambda}} p(k; \lambda) \to \int_\alpha^\beta \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

amint $\lambda \to \infty$.